Le equazioni differenziali lineari di ordine *n* > 2 a coefficienti costanti.

Non presenta difficoltà concettuali il passaggio dalle equazioni lineari a coefficienti costanti del secondo ordine a quelle di ordine maggiore.

Consideriamo l'equazione differenziale

(A) $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$

con a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) costanti reali, $a_n \neq 0$, f funzione continua in un intervallo *I.* Sia

(B) $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

l'equazione omogenea associata. L'integrale generale di (A) si ottiene sommando all'integrale generale di (B) un integrale particolare di (A). L'integrale generale della omogenea è dato dalle combinazioni lineari di *n* soluzioni indipendenti; le *n* soluzioni sono indipendenti se il loro wronskiano è diverso da 0. Le soluzioni indipendenti di (B) si trovano ponendo $y = e^{\lambda x}$ e sostituendo nella (B): si ottiene così l'equazione caratteristica di grado *n* associata a (B):

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Questa equazione, per il teorema fondamentale dell'algebra, ammette *n* soluzioni, eventualmente ripetute, reali o complesse: ricordiamo che se i coefficienti dell'equazione sono reali, le soluzioni complesse si presentano come coppie di numeri complessi coniugati: questo implica che se *n* è dispari, c'è sempre almeno una soluzione reale. Ogni radice reale λ di molteplicità *s* fornisce *s* soluzioni della (B):

$e^{\lambda x}$, $x e^{\lambda x}$, $x^2 e^{\lambda x}$, $x^3 e^{\lambda x}$, … , $x^{s-1} e^{\lambda x}$

Ogni coppia di radici compesse coniugate, $a + ib$ e $a - ib$, di molteplicità *r*, corrisponde a *r* coppie di soluzioni:

$e^{ax}\cos bx$ $\qquad$ $e^{ax}\cos bx$

$x e^{ax}\cos bx$ $\qquad$ $xe^{ax}\cos bx$

$x^2 e^{ax}\cos bx$ $\qquad$ $x^2 e^{ax}\cos bx$

……………………………………………………..

$x^{r-1} e^{ax}\cos bx$ $\qquad$ $x^{r-1} e^{ax}\cos bx$.

In questo modo possiamo scrivere l'integrale generale di (B) come combinazione lineare delle soluzioni $e^{\lambda_i x}$ ottenute. Un integrale particolare $\bar{y}$ di (A) può trovarsi con il metodo di somiglianza o con il metodo di Lagrange; se vogliamo applicare il metodo di Lagrange, esprimiamo l'integrale particolare come $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} u_i y_i$: una volta ottenute le soluzioni y_i, $i=1, \ldots, n$, della (B), poniamo

$\bar{y} = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots\ldots + u_n y_n$

$$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 + \ldots + u'_n y_n = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 + \ldots + u'_n y'_n = 0 \\ u'_1 y''_1 + u'_2 y''_2 + \ldots + u'_n y''_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u'_1 y_1^{(n-2)} + u'_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + u'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Il determinate dei coefficienti di questo sistema, nelle incognite u'_i, coincide con il wronskiano degli integrali y_i ed è diverso da zero se le soluzioni sono indipendenti: il sistema lineare ha sempre un'unica soluzione (u'_1, …., u'_n). Integrando le funzioni u'_i, otteniamo $\bar{y} = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n$ e quindi l'integrale generale della (A) $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + \bar{y}$.

Vale ancora il teorema di esistenza ed unicità, nell'ipotesi della continuità del termine noto di (A): imponendo all'equazione (A) le n condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ y''(x_0) = b_2 \\ y'''(x_0) = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

Una volta calcolate le derivate in x_0 dell'integrale generale di (B) fino all'ordine n–1, la soluzione del problema ai valori iniziali (problema di Cauchy) consiste allora nel risolvere nelle incognite c_i , $i=1, \ldots, n$, il sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = b_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

Nell'ipotesi di indipendenza delle soluzioni y_i la soluzione esiste ed è unica.

Esempio . $y''' - 6y'' + 11 y' - 6 y = 3x^2 - 1$.

Integriamo $L(y) = 0$, ponendo $y = e^{\lambda x}$. Otteniamo

$$e^{\lambda x}(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) = 0$$

Risolviamo l'equazione caratteristica, ricordando che le eventuali radici intere coincidono con i divisori del termine noto: 6 ammette i divisori 1, 2, 3, 6. Sostituendo λ con 1, risulta $1 - 6 + 11 - 6 = 0$: dunque 1 è una soluzione dell'equazione caratteristica. Dividendo $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ per $\lambda - 1$, si ottiene $\lambda^2 - 5\lambda + 6$; questo trinomio si scompone come $(\lambda-2)(\lambda-3)$. L'integrale generale di $L(y) = 0$ è uguale a

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$, perché e^{x}, e^{2x}, e^{3x} sono linearmente indipendenti: infatti

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

risulta uguale a $2e^{6x}$ sempre diverso da zero.

Per integrare $L(y) = 3x^2 - 1$, procediamo con il metodo disomiglianza cercando una soluzione particolare del tipo $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$. Derivando successivamente

$$\begin{cases} \bar{y} = Ax^2 + B\,x + C \\ \bar{y}' = 2Ax + B \\ \bar{y}'' = 2A \\ \bar{y}''' = 0 \end{cases}$$ da cui, sostituendo in $L(y) = \ 3x^2 - 1$,

$-12\,A + 22\,Ax + 11\,B - 6\,A\,x^2 - 6\,Bx - 6C = 3\,x^2 - 1$.

Uguagliando i coefficienti delle potenze di ugual esponente:

$-6A = 3$, $\qquad A = -\frac{1}{2}$

$22\,A - 6\,B = 0$, $\qquad B = \frac{1}{6}\ 22\ \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{6}$

$-12\left(-\frac{1}{2}\right) + 11\left(-\frac{11}{6}\right) - 6C = -1$,

$6 - \frac{121}{6} + 1 = 6C$, $\qquad C = -\frac{79}{36}$.

Integrale genrale di $L(y) = \ 3x^2 - 1$:

$$y = c_1\ e^x + c_2e^{2x} + c_3\ e^{3x} + \bar{y} = c_1\ e^x + c_2e^{2x} + c_3\ e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{6}x - \frac{79}{36}.$$

Esercizi svolti.

1. $y''' - 3y'' - 10\,y' + 24\,y = e^x$.

$L(y) = y''' - 3y'' - 10\,y' + 24\,y = 0$. Si ottiene l'equazione caratteristica:

$\lambda^3 - 3\,\lambda^2 - 10\,\lambda + 24 = 0$. (C)

I divisori di 24 sono:1, 2, 3, 4, 6, 12, 24.

Ponendo $\lambda=1$ nella (C), si ottiene $1 - 3 - 10 + 24 \neq 0$.

L'equazione (C)è soddisfatta da $\lambda = 2$. Si divide il primo membro di (C) per $\lambda - 2$

	1	−3	−10	24
2		2	−2	−24
	1	−1	−12	0

$\lambda^3 - 3\,\lambda^2 - 10\,\lambda + 24 = (\lambda-2)\,(\lambda^2 - \lambda - 12) = (\lambda - 2)\,(\lambda - 4)\,(\lambda + 3)$. Abbiamo dunque l'integrale generale di $L(y) = 0$: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} + c_3e^{-3x}$.

Cerchiamo un integrale particolare della non omogenea nella forma $\bar{y} = ke^x$.

$\bar{y} = k\,e^x$

$\bar{y}' = \bar{y}'' = \bar{y}''' = ke^x$, sostituendo in 1. : $ke^x - 3\,k\,e^x - 10\,k\,e^x + 24\,k\,e^x = e^x$.

Quindi $k = \frac{1}{12} \ \rightarrow \ \bar{y} = \frac{1}{12}e^x$. L'integrale generale di 1. è $y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} + c_3e^{-3x} + \frac{1}{12}e^x$.

Consideriamo $y''' - 3y'' - 10\,y' + 24\,y = e^{2x}$.

In questo caso l'integrale particolare da trovare sarebbe $\bar{y} = k\,x\,e^{2x}$.

$\bar{y} = k\ x\ e^{2x}$

$\bar{y}' = k\ \ e^{2x} + 2kxe^{2x} = k\ \ e^{2x}(2x+1)$

$\bar{y}'' = 2k\ \ e^{2x}(2x+1) + 2ke^{2x} = k\ \ e^{2x}(4x+4)$

$\bar{y}''' = ke^{2x}(8x+12).$

Sostituendo in $L(y) = e^{2x}$:

$ke^{2x}(8x+12) - ke^{2x}(12x+12) + ke^{2x}(-20x-10) + 24ke^{2x} = e^{2x}.$

$-10k\ e^{2x} = e^{2x}$, $\quad k = -\frac{1}{10}$.

---

2. $y^{(4)} - 4\,y^{(3)} + 6\,y^{(2)} - 4\,y^{(1)} + y = 0$

$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$. Consideriamo il triangolo di Tartaglia:

1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Il primo membro dell' equazione coincide con $(\lambda - 1)^4$: Si una radice quadrupla uguale a 1. L'integrale generale è $y = c_1e^x + c_2\ xe^x + c_3x^2e^x + c_4x^3e^x$.

---

3. $y^{(5)} - 2\,y^{(4)} + 8\,y^{(2)} - 12\,y^{(1)} + 8y = 0$

$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$

$(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 1 + i$, di molteplicità 2

$\lambda_3 = 1 - i$, di molteplicità 2.

Ci sono 5 soluzioni indipendenti:

$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^x \cos x$, $y_3 = x\,e^x \cos x$, $y_4 = e^x \operatorname{sen} x$, $y_5 = x\,e^x \operatorname{sen} x$.

---

4. $y''' - y' = 5x$. Soluzione: $y = c_1 + c_2\,e^{-x} + c_3\,e^x - \frac{5}{2}x^2$.

Equazione differenziale di Eulero del terzo ordine.

5. $x^3y''' - 3x^2y'' = 4x^3$, $L(y) = x^3y''' - 3x^2y'' = 0$.

Sia $y = x^\alpha$

$y' = \alpha\ x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha\,(\alpha-1)\ x^{\alpha-2}$

$y''' = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ \ x^{\alpha-3}$.

Sostituendo in $L(y) = 0$,

$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3\ x^{\alpha-3} - 3\alpha(\alpha-1)x^2\ x^{\alpha-2} = 0$, si ottiene l'equazione *indiciale*:

$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2-3) = 0$, che ha soluzioni $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 5$. Integrale generale di $L(y) = 0$:

$y = c_1 + c_2x + c_3x^5$. Cerchiamo un integrale particolare $\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$\bar{y}'' = 6Ax + 2B$

$\bar{y}''' = 6A$. Sostituendo nell'equazione non omogenea:

$6A\,x^3 - 3x^2(6Ax + 2B) = 4x^3$, $(6A - 18A)x^3 - 6Bx^2 = 4x^3$,

$A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$.

$\bar{y} = -\frac{1}{3}x^3 + Cx + D$.

6. Esercizio proposto. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Equazioni differenziali lineari in cui compaiono coefficienti complessi.

7. $\begin{cases} y' + iy = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$A(x) = \int i\,dx = i\,x$, $e^{A(x)} = e^{ix}$

$e^{ix}(y' + iy) = e^{ix}x$, $(y\,e^{ix})' = e^{ix}x$,

$y = e^{-ix}\left(\int x\,e^{ix}dx\right) = e^{-ix}\left(\frac{1}{i}\,xe^{-ix} - \frac{1}{i}\int e^{ix}dx\right) = e^{-ix}\left(-\,xe^{-ix} + e^{ix} + c\right) = -x + 1 + c$.

Se $y(0) = 2$, $c + 1 = 2$, $c = 1 \rightarrow y = -x + 2$.

8. $y'' - 2\,i\,y' - y = 0$, equazione caratteristica $\lambda^2 - 2i\lambda - 1 = 0$, $(\lambda - i)^2 = 0$, $\lambda = i$ radice doppia:

soluzione $y = c_1e^{ix} + c_2x\,e^{ix}$.

9. $\begin{cases} y' - y = e^{-ix} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$A(x) = \int(-1)\,dx = -x$, $e^{A(x)} = e^{-x}$

$e^{-x}(y' - y) = e^{-x}\,e^{-ix}$, $(e^{-x}y)' = e^{-x(1+i)}$

$$y = e^x\left(\int e^{-x(1+i)}dx\right) = e^x\left(-\frac{1}{1+i}\,e^{-x(1+i)} + c\right)$$

$$y = ce^x - \frac{1}{1+i}e^{-ix}$$

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = c - \frac{1}{1+i} \quad , \quad c = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

$y = \frac{1-i}{2}\,e^x - \frac{1-i}{2}\ e^{-ix} = \frac{1-i}{2}\,\left(e^x - e^{-ix}\right)$.

Esercizi.

10. $y^{(4)} = x$.

Procedendo per serie:

$y \quad = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots.$

$y' \quad = a_1 + 2\, a_2 x + 3 \cdot 2\, a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + 5\, a_5 x^4 + \cdots$

$y'' \quad = 2!\; a_2 + 3\; \cdot 2\, a_3 x + 4 \cdot 3\, a_4 x^2 + 5\; \cdot 4\, a_5 x^3 + \cdots$

$y^{(3)} = 3\,!\; a_3 + 4 \cdot 3\; \cdot 2\, a_4\, x + 5\; \cdot 4 \cdot 3\, a_5 x^2 + \cdots$

$y^{(4)} = 4!\; a_4\; + 5\; \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\, a_5\, x + \cdots$

Sostituendo in 10.,

$4!\; a_4\; + 5\; \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\, a_5\, x + \cdots = x,$

da cui $a_4 = 0$, $5!\, a_5 = 1$, $a_6 = a_7 = \ldots.. = a_n = a_{n+1} = \ldots. = 0$. Infine:

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5.$

In alternativa, si può risolvere prima l'equazione differenziale $L(y^{(4)}) = 0$, cui è associata l'equazione caratteristica $\lambda^4 = 0$; si cerca poi la soluzione particolare $\bar{y} = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + E\,x + F$.

11. Integrare l'equazione di Bernoulli: $y' = 2y - e^x y^2$.