Esempio 7. Risolvete il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''+y=4\,\text{sen}\,x \\ y(0)=3 \\ y'(0)=-1. \end{cases}$$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm\, i$. Due soluzioni linearmente indipendenti di $L(y) = 0$ sono $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \text{sen}\, x$. Risolviamo l'equazione non omogenea $L(y) = 4\,\text{sen}\, x$ con il metodo di Lagrange. Cerchiamo una soluzione particolare di $L(y) = 4\,\text{sen}\, x$ nella forma $\bar{y} = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$, con

$$\begin{cases} u_1'\ \cos x + u_2'\ \text{sen}\, x = 0 \\ -u_1'\,\text{sen}\, x + u_2'\ \cos x = 4\,\text{sen}\, x \end{cases}$$

$W(x) = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$,

$$u'_1 = \begin{vmatrix} 0 & \text{sen}\, x \\ 4\,\text{sen}\, x & \cos x \end{vmatrix} = -4\,\text{sen}^2\ x\,, \qquad u'_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\text{sen}\, x & 4\,\text{sen}\, x \end{vmatrix} = 4\,\text{sen}\ x \cos x$$

$$u_1 = -\int 4\,\text{sen}^2\ x = -4 \int \frac{1-\cos 2x}{2}\ dx = -2x + \text{sen}\, 2x\,,$$

$u_2 = \int 4\,\text{sen}\, x\ \cos x\ dx = -\cos 2x$. Ricordiamo che $\dfrac{1-\cos 2x}{2} = \text{sen}^2\ x$, dunque

$u_2 = -\cos 2x = 2\,\text{sen}^2\, x - 1$. Osserviamo che se u_1 e u_2 risolvono

$$\begin{cases} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 = 0 \\ y'_1\, u'_1 + y'_2\, u'_2 = R(x) \end{cases}$$

allora anche $u_1 + a$ e $u_2 + b$, a e b in **R**, soddisfano il sistema: possiamo sostituire $2\,\text{sen}^2\, x - 1$ con $u_2 = 2\,\text{sen}^2\, x$. Esprimiamo la soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$\bar{y}\,(x) = u_1\, y_1 + u_2\, y_2 = 2\,(\text{sen}\, x \cdot \cos x - x)\cos x + 2\,\text{sen}^2 x\ \cdot \text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\, x\,(\cos^2 x + \text{sen}^2 x) - 2x\cos x =$

$= 2\,\text{sen}\, x - 2\, x\cos x.$

Soluzione generale di $L(y) = 4\,\text{sen}\, x$:

$y = c_1 \cos x + c_2\,\text{sen}\, x + 2\,\text{sen}\, x - 2x\cos x = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\, x - 2x\cos x$,

$y' = -c_1\,\text{sen}\, x + c_2 \cos x - 2\cos x + 2x\,\text{sen}\, x$

$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 - 2 = -1 \end{cases} \rightarrow \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 1$. Infine $y = (3-2x)\cos x + \text{sen} x$.

Martedì 30 Aprile 2019

Sulle equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee.

Consideriamo l'equazione differenziale

(A) $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0.$

Se y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti della (A), la soluzione generale è data da

$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, ove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Non esiste però un metodo generale con cui determinare due soluzioni linearmente indipendenti della (A). Tuttavia, se è nota una qualunque soluzione $y_1(x)$ della (A), allora la possiamo utilizzare per calcolarne un'altra, $y_2(x)$. Supponiamo che la soluzione $y_1(x)$ non sia identicamente nulla: imponiamo allora che $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$ sia soluzione della (A).

$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x)$

$y_2'(x) = u'(x) \cdot y_1(x) + u(x) \cdot y_1'(x)$

$y_2''(x) = u''(x) \cdot y_1(x) + u'(x) \cdot y_1'(x) + u'(x) \cdot y_1'(x) + u(x) \cdot y_1''(x) = u''(x) \cdot y_1(x) + 2\, u'(x) \cdot y_1'(x) + u(x) \cdot y_1''(x).$

Sostituiamo nella (A):

$u'' \cdot y_1 + 2\, u' \cdot y_1' + u \cdot y_1'' + P \cdot (u' \cdot y_1 + u \cdot y_1') + Q \cdot u \cdot y_1 = 0.$

Ordinando in modo opportuno

(B) $u''\, y_1 + u'\,(2\, y_1' + P\, y_1) + u\,(y_1'' + P\, y_1' + Q\, y_1) = 0.$

Ma y_1 è soluzione di (A),dunque la (B) si riduce a

$$u''\, y_1 + u'\,(2\, y_1' + P\, y_1) = 0$$

da cui

$$\frac{u''}{u'} = -2\,\frac{y'_1}{y_1} - P.$$

Integriamo ottenendo:

$$\log u' = -2 \log y_1 - \int P\, dx = \log y_1^{-2} - \int P\, dx$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P\, dx}.$$

Con un'ulteriore integrazione esprimiamo $u(x)$:

(C) $$u = \int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P\, dx} dx\,.$$

Verifichiamo che y_1 e $y_2 = u \cdot y_1$ sono linearmente indipendenti, utilizzando $W(y_1, y_2)$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & u\, y_1 \\ y'_1 & u'\, y'_1 + u\, y'_1 \end{vmatrix} = y_1^2\, u' + u\, y_1\, y_1' - u\, y_1\, y_1' = y_1^2\, u'.$$

L'wronskiano $W(y_1, y_2)$ è sempre diverso da zero perché $W(y_1, y_2) = y_1^2\, \dfrac{1}{y_1^2}\, e^{-\int P\, dx} = e^{-\int P\, dx} \neq 0.$

Il metodo appena esposto è il *metodo di riduzione dell'ordine.*

Esempio 1. $x^2 y'' + x y' - y = 0$.

La funzione $y_1 = x$ è soluzione dell'equazione assegnata. Sia $y_2 = u$ x. Riscriviamo l'equazione come

$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$. Dalla (C): $u = \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx = \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\log x}\, dx = \int x^{-3}\, dx = -\frac{1}{2x^2}$.

Dunque $y_2 = u$ x = $-\frac{1}{2x}$. L'integrale generale dell'equazione è $y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$.

Esempio 2. a) $x^2 y'' - 7 xy' + 15 y = 0$, $x > 0$.

Si verifica subito che né $y = x$ né $y = x^2$ soddisfano l'equazione assegnata, mentre $y = y_1 = x^3$ è una soluzione. Cerchiamo $y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = u\, x^3$.

$y_2 = u\, x^3$

$y'_2 = u' x^3 + 3\, u\, x^2$

$y''_2 = u'' x^3 + 3\, u' x^2 + 3\, u' x^2 + 6\, u\, x = u'' x^3 + 6\, u' x^2 + 6\, u\, x$. Sostituendo nell'equazione:

$u'' x^5 + 6\, u' x^4 + 6\, u^3\, x - 7\, u' x^4 - 21\, u\, x^3 + 15\, u\, x^3 = 0$

$u'' x^5 = u' x^4$, $\frac{u''}{u'} = \frac{1}{x}$. Integriamo: $\log u' = \log x$, $u' = x$, e infine $u = \frac{x^2}{2}$.

$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = x^3 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} x^5$. L'integrale generale dell'equazione è $y = c_1\, x^3 + c_2\, x^5$.

b) Consideriamo l'equazione non omogenea

$x^2 y'' - 7 xy' + 15 y = 3x + 1$.

Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati, ponendo

$\bar{y} = k\, x + h$.

$\bar{y}' = k$

$\bar{y}'' = 0$. Sostituendo:

$-7\, kx + 15\, kx + 15\, h = 3\, x + 1$,

$8\, kx + 15\, h = 3\, x + 1$, da cui

$k = 3/8$ e $h = 1/15$: $\bar{y} = \frac{3}{8}x + \frac{1}{15}$.

L'integrale generale è allora $y = c_1\, x^3 + c_2\, x^5 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{15}$.

Esempio 3. $x\, y'' - (x + 1)\, y' + y = 0$.

E' facile verificare che $y_1 = e^x$ soddisfa l'equazione.

Riportiamo l'equazione alla forma $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$, ottenendo $y'' - \frac{x+1}{x} y' + \frac{1}{x}\, y = 0$.

Applicando (C),

$$u=\int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int P dx} dx=\int \frac{1}{e^{2x}}\ e^{x+\log x} dx=\int x e^{-x} dx\ =\ -x\ e^{-x}+\int e^{-x} dx=-(x+1)e^{-x}.$$

$y_2 = u\, y_1 = -(x+1)\ e^{-x}\ e^{x} = \ -(x+1)$.

L'integrale generale è $y = c_1 e^x + c_2 (x+1)$.

Equazioni di Eulero.

Le equazioni di Eulero sono equazioni differenziali di ordine n del tipo

(1) $a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),\ a_0 \neq 0.$

La funzione f si suppone continua sull'intervallo I.

Illustriamo la risoluzione di queste equazioni partendo da un' equazione del secondo ordine, utilizzando innanzi tutto un approccio euristico. Consideriamo l'equazione di Eulero

(2) $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0.$

Poniamo $y = x^\alpha$

$y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha\,(\alpha-1)\ x^{\alpha-2}$

da cui $x^2\alpha\,(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 4x\alpha x^{\alpha-1} + 4x^\alpha = 0$,

$\alpha\,(\alpha-1)x^{\alpha} - 4\alpha x^\alpha + 4x^\alpha = 0$

$x^{\alpha}\,[\alpha\,(\alpha-1) - 4\alpha + 4] = 0$

$x^{\alpha}\,[\alpha^2 - 5\alpha + 4] = 0.$

L'equazione equivale, essendo x^α diverso da zero se $x \neq 0$, a $\alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$. Quest'ultima equazione è detta *equazione indiciale* e ha soluzioni $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 4$. L'integrale generale della (2) è dato da

$$y = c_1 x + c_2\, x^4.$$

Il metodo canonico di risoluzione prevede invece il cambio di variabile $x = e^t$, da cui $t = \log x$.

Sia $x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^2$.

Se $x = e^t$, $x^2 = e^{2t}$. Risulta

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Conviene introdurre il simbolismo $\dot{y}=\dfrac{dy}{dt},\quad \ddot{y}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$. Si ottiene

$$x^2 \frac{1}{x^2}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right)+2x\,\frac{1}{x}\dot{y}-2y=0\,,$$

$\ddot{y}+(2-1)\,\dot{y}\,-2y=0,\ \ \ddot{y}+\ \dot{y}\ -2y=0.$ Risolvendo l'equazione caratteristica $\lambda^2+\lambda-2=0$, si trova l'integrale generale di $L(y)$ = $\ddot{y}+\dot{y}-2y=0$: $y = c_1 e^{-2t} + c_2\, e^t$.

Sia $\bar{y} = k\,e^{2t}$. Quindi

$\bar{y}\,' = 2k\,e^{2t}$

$\bar{y}'' = 4k\,e^{2t}$.

Sostituendo in $\ddot{y}+\ \dot{y}\ -2y=e^{2t}$: $4ke^{2t}+2ke^{2t}-2ke^{2t} = e^{2t}$, da cui $k=\frac{1}{4}$.

In definitiva, si ha l'integrale generale di $x^2y''+2xy'-2y = x^2$:

$y = c_1e^{-2t}+c_2e^t+\frac{1}{4}\ e^{2t}$, che ricordando la sostituzione $x = e^t$, equivale a

$$y = c_1x^{-2}+c_2x+\frac{1}{4}\ x^2.$$

Esercizio risolto. $2\,x^2\,y'' + 3x\,y' - y = x$.

Risolviamo l'equazione omogenea associata: $2\,x^2\,y'' + 3x\,y' - y = 0$.

$x = e^t$, $t = \log x$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)$,

$$2x^2\left[\frac{1}{x^2}\left(\ddot{y}-\dot{y}\right)\right]+3x\frac{1}{x}\ \dot{y}-y=0\ ,\ 2\ddot{y}-2\,\dot{y}+3\,\dot{y}-y=0\,.$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica $2\lambda^2+\lambda-1=0$ sono -1 e ½ :

L'integrale generale è $y = c_1\,e^{-t}+c_2e^{\frac{1}{2}t}$. Consideriamo l'equazione non omogenea:

$y=c_1\dfrac{1}{x}+c_2\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}x$. Cerchiamo un integrale particolare del tipo $\bar{y}=k\,e^t$.

$\bar{y}\,'=k\,e^t$, $\bar{y}\,''=k\,e^t$ $\rightarrow$ e^t $(2\,k+k-k) = e^t$. Si conclude che k = ½ ; esprimendo y in funzione di x,

$$y=c_1\frac{1}{x}+c_2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\,.$$

Esercizi proposti. In ognuno dei seguenti casi viene data un'equazione differenziale, una funzione $y_1(x)$ e un intervallo. Verificare che $y_1(x)$ soddisfa l'equazione nell'intervallo indicato, e trovare una seconda soluzione linearmente indipendente utilizzando il metodo di riduzione dell'ordine.

(e) $(1-x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y_1(x) = 1 \quad (-1 < x < 1)$.

(f) $x^2y'' + y' - \frac{1}{x}y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(g) $x^2y'' - \frac{1}{2}xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \quad (x > 0)$.

(h) $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(i) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0)$.

(j) $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \quad (x > 0)$.

(k) $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^{1/2} \quad (x > 0)$.

(l) $y'' - \frac{1}{x\log x}y' + \frac{1}{x^2\log x}y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 1)$.

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \quad \text{per } x > 0.$$

(a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante.

(b) Trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.

(c) Determinare le 2 soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali
$y(1) = 1,\ y'(1) = 0$ e $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee del secondo ordine:

(a) $y'' + 4y = \cos x$

(b) $y'' + 4y = \sin 2x$

(c) $y'' - 3y' + 2y = x^2$

(d) $4y'' - y = e^x$

(e) $6y'' + 5y' - 6y = x$

(f) $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$

(g) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$