1. Determinare il dominio e l'espressione esplicita della primitiva della funzione $f(x)=\frac{|x-2|}{\sqrt{|x|}}$ che nel punto 1 vale 1.

2. Stabilire il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln k}}$.

3. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 5 della funzione $f(x)=e^{x^2\ln(1+x+x^2)}-\cos(2x)$.

4. Risolvere nel campo complesso l'equazione $z-\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{327}=0$.

----

1. La primitiva cercata è $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt+1$ definita in $D_F=(0,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{|x-2|}{\sqrt{|x|}}=\begin{cases}\frac{x-2}{\sqrt{x}} & \text{se}\, x\geq 2\\ \frac{-x+2}{\sqrt{x}} & \text{se}\, 0<x<2\end{cases}$$

1 caso $x\in(0,2)$

$$F(x)=\int_1^x\frac{-t+2}{\sqrt{t}}dt+1=\int_1^x\left(-t^{1/2}+2t^{-1/2}\right)dt+1=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+4t^{1/2}\right)\Big]_1^x+1=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-\frac{7}{3}$$

2 caso $x\in[2,+\infty)$

$$F(x)=\int_1^2\frac{-t+2}{\sqrt{t}}dt+\int_2^x\frac{t-2}{\sqrt{t}}dt+1=\int_1^2\left(-t^{1/2}+2t^{-1/2}\right)dt+\int_2^x\left(t^{1/2}-2t^{-1/2}\right)dt+1=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+4t^{1/2}\right)\Big]_1^2+\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-4t^{1/2}\right)\Big]_2^x+1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{3} & \text{se}\, x\geq 2\\ -\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-\frac{7}{3} & \text{se}\, 0<x<2\end{cases}$$

----

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln k\ln 3}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\ln 3}}$ quindi la serie converge.

----

3. $\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}+o[x^3]=(x+x^2)-\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+o[x^3]$ per $x\to 0$.

$x^2\ln(1+x+x^2)=x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$. $e^{x^2\ln(1+x+x^2)}=1+x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$

$\cos(2x)=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o[x^4]$ per $x\to 0$. $P_5(x)=2x^2+x^3-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{3}x^5$

----

4. $z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{327}=\cos\left(-327\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-327\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-109\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-109\frac{\pi}{2}\right)=$

$$=\cos\left(-54\pi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-54\pi-\frac{\pi}{2}\right)=i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$$

1. Determinare il dominio e l'espressione esplicita della primitiva della funzione $f(x)=\frac{|x-3|}{\sqrt{|x|}}$ che nel punto 1 vale -1.

2. Stabilire il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln k}}$.

3. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 5 della funzione $f(x)=e^{x^2\ln(1+x+x^2)}-x\sin x$.

4. Risolvere nel campo complesso l'equazione $z-\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{327}=0$.

----

1. La primitiva cercata è $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt-1$ definita in $D_F=(0,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{|x-3|}{\sqrt{|x|}}=\begin{cases}\frac{x-3}{\sqrt{x}} & \text{se } x\geq 3\\ \frac{-x+3}{\sqrt{x}} & \text{se } 0<x<3\end{cases}$$

1 caso $x\in(0,3)$

$$F(x)=\int_1^x\frac{-t+3}{\sqrt{t}}dt-1=\int_1^x\left(-t^{1/2}+3t^{-1/2}\right)dt-1=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+6t^{1/2}\right)\Big]_1^x-1=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-\frac{19}{3}$$

2 caso $x\in[3,+\infty)$

$$F(x)=\int_1^3\frac{-t+3}{\sqrt{t}}dt+\int_3^x\frac{t-3}{\sqrt{t}}dt-1=\int_1^3\left(-t^{1/2}+3t^{-1/2}\right)dt+\int_3^x\left(t^{1/2}-3t^{-1/2}\right)dt-1=$$
$$=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+6t^{1/2}\right)\Big]_1^3+\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-6t^{1/2}\right)\Big]_3^x-1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}+8\sqrt{3}-\frac{19}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}+8\sqrt{3}-\frac{19}{3} & \text{se } x\geq 3\\ -\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-\frac{19}{3} & \text{se } 0<x<3\end{cases}$$

----

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln k\ln 2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\ln 2}}$ quindi la serie diverge.

----

3. $\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}+o[x^3]=x+x^2-\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+o[x^3]$ per $x\to 0$.

$x^2\ln(1+x+x^2)=x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$; $e^{x^2\ln(1+x+x^2)}=1+x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$.

$x\sin(x)=x^2-\frac{x^4}{6}+o[x^4]$ per $x\to 0$. $\qquad P_5(x)=1-x^2+x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{2}{3}x^5$

----

4. $$z=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{327}=\cos\left(327\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(327\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(109\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(109\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\cos\left(54\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(54\pi+\frac{\pi}{2}\right)=i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i.$$

1. $f(x)=|x^3|=\begin{cases} x^3 & se \quad x\ge 0 \\ -x^3 & se \quad x<0 \end{cases}$. f è continua in $[-1,2]$. $\forall x\ne 0$ si ha $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & se \quad x>0 \\ -3x^2 & se \quad x<0 \end{cases}$.

Poiché $f'(0^+)=f'(0^-)=0$ f è derivabile in $(-1,2)$.

Allora è applicabile il teorema di Lagrange e si ha $f(2)-f(-1)=f'(c)(2+1)$, cioè

$$\begin{cases} 8-1=3c^2(2+1) & \text{con} \quad c\in[0,2) \\ 8-1=-3c^2(2+1) & \text{con} \quad c\in(-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2=\dfrac{7}{9} & \text{con} \quad c\in[0,2) \\ c^2=-\dfrac{7}{9} & \text{con} \quad c\in(-1,0) \end{cases} \Rightarrow \quad c=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

----

2. Posto $F(x)=\arcsin\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\arcsin(2x-3)-\frac{\pi}{4}$ occorre dimostrare che $F(x)=0$ in $[1,2]$.

Si ha $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x+1}}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{2}{2\sqrt{1-(2x-3)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2-9+12x}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}=0$, $\forall x\in[1,2]$. Quindi $F(x)$ è costante in $[1,2]$.

Poiché $F(1)=-\frac{1}{2}\arcsin(-1)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$, allora $F(x)=0$ in $[1,2]$.

----

3. La primitiva cercata è $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt+1$ definita in $D_F=(0,+\infty)$. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{|x|}}=\begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}} & \text{se}\, x\ge 2 \\ \dfrac{-x+2}{\sqrt{x}} & \text{se}\, 0<x<2 \end{cases}$

1 caso $x\in(0,2)$

$$F(x)=\int_1^x \frac{-t+2}{\sqrt{t}}dt+1=\int_1^x\left(-t^{1/2}+2t^{-1/2}\right)dt+1=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+4t^{1/2}\right)\Big]_1^x+1=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-\frac{7}{3}$$

2 caso $x\in[2,+\infty)$

$$F(x)=\int_1^2 \frac{-t+2}{\sqrt{t}}dt+\int_2^x \frac{t-2}{\sqrt{t}}dt+1=\int_1^2\left(-t^{1/2}+2t^{-1/2}\right)dt+\int_2^x\left(t^{1/2}-2t^{-1/2}\right)dt+1=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+4t^{1/2}\right)\Big]_1^2+\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-4t^{1/2}\right)\Big]_2^x+1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+\dfrac{16}{3}\sqrt{2}-\dfrac{7}{3} & \text{se}\, x\ge 2 \\ -\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-\dfrac{7}{3} & \text{se}\, 0<x<2 \end{cases}$$

----

4. $\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\dfrac{(x+x^2)^2}{2}+\dfrac{(x+x^2)^3}{3}+o[x^3]=(x+x^2)-\dfrac{x^2}{2}-x^3-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o[x^3]$ per $x\to 0$.

$x^2\ln(1+x+x^2)=x^3+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$. $e^{x^2\ln(1+x+x^2)}=1+x^3+\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$

$\cos(2x)=1-2x^2+\dfrac{2}{3}x^4+o[x^4]$ per $x\to 0$. $\qquad P_5(x)=2x^2+x^3-\dfrac{1}{6}x^4-\dfrac{2}{3}x^5$

----

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln k\ln 3}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\ln 3}}$ quindi la serie converge.

1. $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$. f è continua in $[-8,8]$. $\forall x\neq 0$ si ha $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Poiché $f'(0^+)=f'(0^-)=0$ f è derivabile in $(-8,8)$.

Allora è applicabile il teorema di Lagrange e si ha $f(8)-f(-8)=f'(c)(8+8)$, cioè

$0=\frac{4}{3}\sqrt[3]{c}\,16 \quad\Rightarrow\quad c=0$.

----

2. Posto $F(x)=\arcsin\sqrt{2x-5}-\frac{1}{2}\arcsin(4x-11)-\frac{\pi}{4}$ occorre dimostrare che $F(x)=0$ in $\left[\frac{5}{2},3\right]$.

Si ha $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x+5}}\frac{2}{2\sqrt{2x-5}}-\frac{4}{2\sqrt{1-(4x-11)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x-5}}-\frac{2}{\sqrt{1-16x^2-121+88x}}$

$=\frac{1}{\sqrt{-4x^2+22x-30}}-\frac{1}{\sqrt{-4x^2+22x-30}}=0$, $\forall x\in\left[\frac{5}{2},3\right]$. Quindi $F(x)$ è costante in $\left[\frac{5}{2},3\right]$.

Poiché $F(3)=\arcsin(1)-\frac{1}{2}\arcsin(1)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$, allora $F(x)=0$ in $\left[\frac{5}{2},3\right]$.

----

3. La primitiva cercata è $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt-1$ definita in $D_F=(0,+\infty)$. $f(x)=\frac{|x-3|}{\sqrt{|x|}}=\begin{cases}\frac{x-3}{\sqrt{x}} & \text{se}\, x\geq 3\\ \frac{-x+3}{\sqrt{x}} & \text{se}\, 0<x<3\end{cases}$

1 caso $x\in(0,3)$

$$F(x)=\int_1^x\frac{-t+3}{\sqrt{t}}dt-1=\int_1^x\left(-t^{1/2}+3t^{-1/2}\right)dt-1=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+6t^{1/2}\right)\Big]_1^x-1=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-\frac{19}{3}$$

2 caso $x\in[3,+\infty)$

$$F(x)=\int_1^3\frac{-t+3}{\sqrt{t}}dt+\int_3^x\frac{t-3}{\sqrt{t}}dt-1=\int_1^3\left(-t^{1/2}+3t^{-1/2}\right)dt+\int_3^x\left(t^{1/2}-3t^{-1/2}\right)dt-1=$$

$$=\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}+6t^{1/2}\right)\Big]_1^3+\left(\frac{2}{3}t^{3/2}-6t^{1/2}\right)\Big]_3^x-1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}+8\sqrt{3}-\frac{19}{3}$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x\sqrt{x}-6\sqrt{x}+8\sqrt{3}-\frac{19}{3} & \text{se}\, x\geq 3\\ -\frac{2}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}-\frac{19}{3} & \text{se}\, 0<x<3\end{cases}$$

----

4. $\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}+o[x^3]=x+x^2-\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+o[x^3]$ per $x\to 0$.

$x^2\ln(1+x+x^2)=x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$; $e^{x^2\ln(1+x+x^2)}=1+x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{2}{3}x^5+o[x^5]$ per $x\to 0$.

$x\sin(x)=x^2-\frac{x^4}{6}+o[x^4]$ per $x\to 0$. $\qquad P_5(x)=1-x^2+x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{2}{3}x^5$

----

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln k\ln 2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\ln 2}}$ quindi la serie diverge.

1. Posto $t=3x$ allora se $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}$. $y=\sin t$ è strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ e, dal grafico, si ha $t=\arcsin(-y)+\pi$. Quindi $x=\frac{-\arcsin y+\pi}{3}$.

----

2. La funzione $x=f^{-1}(y)=y^7$ è derivabile in **R** e si ha $\frac{df^{-1}}{dy}(y)=7y^6$. Poiché la derivata si annulla in $y=0$, la funzione inversa $y=f(x)=\sqrt[7]{x}$ non è derivabile in $x_0=f^{-1}(0)=0$. Risulta derivabile in $R-\{0\}$ e $\forall x\ne 0$ si ha $\frac{df}{dx}(x)=\frac{1}{7y^6}=\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$.

----

3. La primitiva è $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt+1$ definita in $D_F=(-1,+\infty)$. $f(x)=\frac{3x+|x|}{x+1}=\begin{cases}\frac{2x}{x+1} & \text{se}-1<x<0\\ \frac{4x}{x+1} & \text{se}\, x\ge 0\end{cases}$

1 caso $x\in(-1,0)$

$$F(x)=\int_1^0\frac{4t}{t+1}dt+\int_0^x\frac{2t}{t+1}dt+1=4t\Big]_1^0-4\ln|t+1|\Big]_1^0+2t\Big]_0^x-2\ln|t+1|\Big]_0^x+1=-3+4\ln 2+2x-2\ln(x+1)$$

2 caso $x\in[0,+\infty)$

$$F(x)=\int_1^x\frac{4t}{t+1}dt+1=4t\Big]_1^x-4\ln|t+1|\Big]_1^x+1=4x-3-4\ln(x+1)+4\ln 2$$

$$F(x)=\begin{cases}2x-2\ln(x+1)-3+4\ln 2 & \text{se } -1<x<0\\ 4x-4\ln(x+1)-3+4\ln 2 & \text{se } x\ge 0\end{cases}$$

----

4. $\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o[x^8]$ per $x\to 0$. $x^2+\ln(1-x^2)=-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o[x^8]$ per $x\to 0$;

$$\left[x^2+\ln(1-x^2)\right]\cos^2 x=\left(-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o[x^8]\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+o[x^8]\right)^2 \text{ per } x\to 0.$$

$$\left[x^2+\ln(1-x^2)\right]\cos^2 x=\left(-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o[x^8]\right)\left(1+\frac{x^4}{4}+\frac{x^8}{576}-x^2+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{360}+\frac{x^8}{20160}-\frac{x^6}{24}+\frac{x^8}{6!}+o[x^8]\right)$$

$$\left[x^2+\ln(1-x^2)\right]\cos^2 x=-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o[x^8]-\frac{x^8}{8}+\frac{x^6}{2}+\frac{x^8}{3}-\frac{x^8}{24} \text{ per } x\to 0.$$

$$P_8(x)=-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}-\frac{x^8}{12}$$

----

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(\alpha+1)}\sqrt{k}}$. Dal criterio della radice $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2^{k(\alpha+1)}\sqrt{k}}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}}=\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{\ln k}{2k}}}=\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}\frac{1}{e^0}=\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}$.

Se $\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}<1$, cioè $\alpha>-1$ la serie converge. Se $\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}>1$, cioè $\alpha<-1$ la serie diverge.

Se $\frac{1}{2^{(\alpha+1)}}=1$, cioè $\alpha=-1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ la serie diverge.

1. Posto $t=3x$ allora se $-\frac{2\pi}{3}\le x\le -\frac{\pi}{3} \Rightarrow -2\pi\le t\le -\pi$. $y=\cos t$ è strettamente decrescente in $[-2\pi,-\pi]$ e, dal grafico, si ha $t=\arccos(y)-2\pi$. Quindi $x=\frac{\arccos y-2\pi}{3}$.

----

2. La funzione $x=f^{-1}(y)=y^5$ è derivabile in **R** e si ha $\frac{df^{-1}}{dy}(y)=5y^4$. Poiché la derivata si annulla in $y=0$, la funzione inversa $y=f(x)=\sqrt[5]{x}$ non è derivabile in $x_0=f^{-1}(0)=0$. Risulta derivabile in $R-\{0\}$ e $\forall x\ne 0$ si ha $\frac{df}{dx}(x)=\frac{1}{5y^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

----

3. La primitiva è $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt+1$ definita in $D_F=(-\infty,1)$. $f(x)=\frac{3x+|x|}{x-1}=\begin{cases}\frac{2x}{x-1} & \text{se } x<0\\ \frac{4x}{x-1} & \text{se } 0\le x<1\end{cases}$

1 caso $x\in(-\infty,0)$

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{2t}{t-1}dt+1=2t\Big]_{-1}^{x}+2\ln|t-1|\Big]_{-1}^{x}+1=2x+2+2\ln|x-1|-2\ln 2+1$$

2 caso $x\in[0,1)$

$$F(x)=\int_{-1}^{0}\frac{2t}{t-1}dt+\int_{0}^{x}\frac{4t}{t-1}dt+1=2t\Big]_{-1}^{0}+2\ln|t-1|\Big]_{-1}^{0}+4t\Big]_{0}^{x}+4\ln|t-1|\Big]_{0}^{x}+1=2-2\ln 2+4x+4\ln|x-1|+1$$

$$F(x)=\begin{cases}2x+2\ln(x-1)+3-2\ln 2 & \text{se } x<0\\ 4x+4\ln(x-1)+3-2\ln 2 & \text{se } 0\le x<1\end{cases}$$

----

4. $\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+o[x^8]$ per $x\to 0$. $x^2-\ln(1+x^2)=\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+o[x^8]$ per $x\to 0$;

$$\left[x^2-\ln(1+x^2)\right]\sin^2 x=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+o[x^8]\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o[x^8]\right)^2 \text{ per } x\to 0.$$

$$\left[x^2-\ln(1+x^2)\right]\sin^2 x=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+o[x^8]\right)\left(x^2+\frac{x^6}{36}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}-\frac{x^8}{2520}-\frac{x^8}{360}+o[x^8]\right)$$

$$\left[x^2-\ln(1+x^2)\right]\sin^2 x=\frac{x^6}{2}-\frac{x^8}{3}+o[x^8] \text{ per } x\to 0.$$

$$P_8(x)=\frac{x^6}{2}-\frac{x^8}{3}$$

----

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}k^2}$. Dal criterio della radice $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}k^2}\right)^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{\frac{2}{k}}}=\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{2\ln k}{k}}}=\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\frac{1}{e^0}=\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}$.

Se $\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}<1$, cioè $\alpha>1$ la serie converge. Se $\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}>1$, cioè $\alpha<1$ la serie diverge.

Se $\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}=1$, cioè $\alpha=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ la serie converge.