La trasformata di Laplace.

Sia f una funzione definita per $t \geq 0$. [1]La trasformata di Laplace della funzione f è definita da

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

supposto che l'integrale abbia significato per certi valori di $s \in \mathbf{R}$. Più esattamente,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} f(t)e^{-st}dt.$$

Si introduce così l'operatore di Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$, coincidente con l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Esempio 1. Sia $f = k$ per $t \geq 0$. Calcoliamo $\mathcal{L}[f(t)]$. Per definizione,

$$\mathcal{L}[k] = F(s) = k \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} e^{-st}dt = k \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{1}{s}\int_0^{\omega} e^{-st} d(-st) \right] = k \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{1}{s}\, e^{-st}\Big|_0^{\omega} \right] = \frac{k}{s}\left(1 - \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{e^{s\omega}}\right).$$

Se $s > 0$, $\mathcal{L}[k] = \frac{k}{s}$.

Esempio 2. Sia $f(t) = t$ per $t \geq 0$.

$$\mathcal{L}[\, t\,] = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} t\, e^{-st}dt \; ; \; \{ \int t\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} t\, e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} t\, e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} + c \,\}$$

$$\mathcal{L}[\, t\,] = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{t}{s}\, e^{-st} - \frac{1}{s^2}\, e^{-st} \right]_0^{\omega} = \frac{1}{s^2}.$$

Esempio 3. $\mathcal{L}[\, t^2\,] = \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-st}\, dt$.

$$\left\{ \int t^2\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} t^2\, e^{-st} + \frac{1}{s}\int 2t\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} t^2\, e^{-st} - \frac{2}{s^2} t\, e^{-st} + \frac{2}{s^2}\int e^{-st}dt = -\frac{1}{s} t^2\, e^{-st} - \frac{2}{s^2} t\, e^{-st} - \frac{2}{s^3}\, e^{-st} + c \right\}$$

$$\mathcal{L}[\, t^2\,] = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{1}{s} t^2 e^{-st} - \frac{2}{s^2} e^{-st} t - \frac{2}{s^3} e^{-st} \right]_0^{\omega} = \frac{2}{s^3},\; s > 0.$$

Si dimostra per induzione che $\mathcal{L}[\, t^n\,] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Esempio 4. Sia $f(t) = e^{a\,t}$, $t \geq 0$.

$$\mathcal{L}[\, e^{a\,t}\,] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{at}\, e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}dt = -\frac{1}{s-a} \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} d(-(s-a)t) =$$

[1] Per una trattazione esauriente dell'argomento vedi *Equazioni differenziali ordinarie*, A. Laforgia, Accademica.

$= -\frac{1}{s-a}\ \lim_{\omega\to+\infty}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^{\omega} = \frac{1}{s-a}.$

Anticipiamo una proprietà fondamentale della trasformata di Laplace: *la corrispondenza posta dall'operatore $\mathcal{L}$ tra le funzioni e le rispettive trasformate è biunivoca*: ciò significa che se le funzioni f e g hanno la stessa trasformata, necessariamente f coincide con g.

Esempio 5. Sia $f(t)$ = sen $a\ t,\ t \geq 0$.

$\mathcal{L}[\text{sen } a\,t\,] = F(s) = \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} \text{sen } at\ e^{-st}dt.$

Integrando per parti:

$$\int_0^{\omega} \text{sen } at\ e^{-st}dt = \left[-\frac{\text{sen } at\ e^{-st}}{s}\right]_0^{\omega} + \frac{a}{s}\int_0^{\omega} \cos at\ e^{-st}dt. \qquad \text{(S)}$$

Passando al limite per ω a + infinito e integrando di nuovo per parti:

$$\int_0^{+\infty} \text{sen } at\ e^{-st}dt = \frac{a}{s}\int_0^{+\infty} \cos at\ e^{-st}dt = \frac{a}{s}\left[-\frac{\cos at\ e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} - \frac{a^2}{s^2}\int_0^{+\infty} \text{sen } at\ e^{-st}dt$$

da cui $\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right)\int_0^{+\infty} \text{sen } at\ e^{-st}dt = \frac{a}{s}\cdot\frac{1}{s},\ \int_0^{+\infty} \text{sen } at\ e^{-st}dt = \frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$.

In definitiva:

$$\mathcal{L}[\text{sen } a\,t\,] = \frac{a}{s^2+a^2},\quad s > 0.$$

Esempio 6. Procedendo come nell'esempio precedente e tenuto conto della (S), si ottiene:

$$\mathcal{L}[\cos\ a\,t\,] = \frac{s}{s^2+a^2},\quad s > 0.$$

Proprietà della trasformata di Laplace.

Dalla definizione di trasformata di Laplace e dalla linearità dell'integrale, discende il seguente teorema:

Teorema 1. Siano f e g due funzioni per le quali esistono le trasformate di Laplace, rispettivamente per $s > a_1$ e per $s > a_2$. Allora, posto $a = \max(a_1, a_2)$ risulta, per $s > a$,

$$\mathcal{L}[c_1 f(t) + c_2\, g(t)] = c_1\mathcal{L}[f(t)] + c_2\,\mathcal{L}[g(t)].$$

Ricordiamo due importanti risultati relativi agli integrali impropri.

a) Sia M un numero reale positivo e sia f una funzione continua a tratti per $t > a$. Sia inoltre $|f(t)| \leq g(t)$ per $t \geq M$. Sotto questa ipotesi
se $\int_M^{+\infty} g(t)dt$ converge, allora converge anche $\int_M^{+\infty} f(t)dt$.

b) Se $f(t) \geq g(t) \geq 0$, per $t \geq M$, e se $\int_M^{+\infty} g(t)dt$ diverge, diverge anche $\int_M^{+\infty} f(t)dt$.

Definizione. Diciamo che una funzione f è di ordine esponenziale e^{at} se esistono due costanti N, K tali che $|f(t)| \leq N\, e^{at}$ per ogni $t \geq K$.

Teorema 2. (Esistenza della trasformata di Laplace). Supponiamo che f soddisfi le ipotesi:

a) f è continua a tratti per $t \geq 0$

b) f è di ordine esponenziale e^{at}, $a > 0$

allora esiste $F(s)$ per la funzione f, $\forall\, s > a$.

Teorema 3. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ per $s > a$. Allora per ogni $s > a$ risulta

$$\mathcal{L}[f(b\, t)] = \frac{1}{b}\, F\left(\frac{s}{b}\right), \frac{s}{b} > a.$$

La dimostrazione è piuttosto semplice. Risulta infatti $F\left(\frac{s}{b}\right) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\frac{s\,t}{b}}\, dt$. Ponendo $u = \frac{t}{b}$, si ottiene

$$F\left(\frac{s}{b}\right) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\frac{s\,t}{b}}\, dt = b\int_0^{+\infty} f(bu)\, e^{-su}\, du = b\mathcal{L}[f(\, bt)]$$

da cui la tesi.

Teorema 4. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ per $s > a$. Risulta $\mathcal{L}[\, e^{b\,t} f(t)] = F(s - b)$.

Infatti

$$F(s - b) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-b)t}dt = \int_0^{+\infty} e^{bt}f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[\, e^{b\,t} f(t)].$$

Esercizi.

1. Calcolare $\mathcal{L}[\, e^{b\,t}$ sen $at]$, sapendo che $\mathcal{L}[$sen $a\,t\,] = \frac{a}{a^2+s^2}$.

   $\mathcal{L}[\, e^{b\,t}$ sen $at] = F(s - b) = \frac{a}{a^2+(s-b)^2}$.

   Analogamente, $\mathcal{L}[\, e^{b\,t} \cos at] = \frac{(s-b)^2}{a^2+(s-b)^2}$.

2. Calcolare $\mathcal{L}[\cosh at]$.

   Essendo $\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$, per la linearità dell'operatore $\mathcal{L}$

   $\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2-a^2}$, a condizione che $s > |a|$.

3. Verificare che $\mathcal{L}[\text{senh}\, at] = \frac{a}{s^2-a^2}$, a condizione che $s > |a|$.

4. Calcolare $\mathcal{L}[2\, e^{3t}$ sen $(4t)]$.

5. Calcolare $\mathcal{L}[(t + 4)^2 e^{-5t}]$.

6. Calcolare $\mathcal{L}\left[3\, e^{-t}\, \text{sen}\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$.

7. Calcolare $\mathcal{L}[2$ sen $(3t) + e^{2t}\, 4 \cos t]$.

Teorema 5. Sia τ un numero reale.

Allora $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[f(t)] + e^{-\tau s}\int_{-\tau}^{0} f(t)e^{-st}dt$.

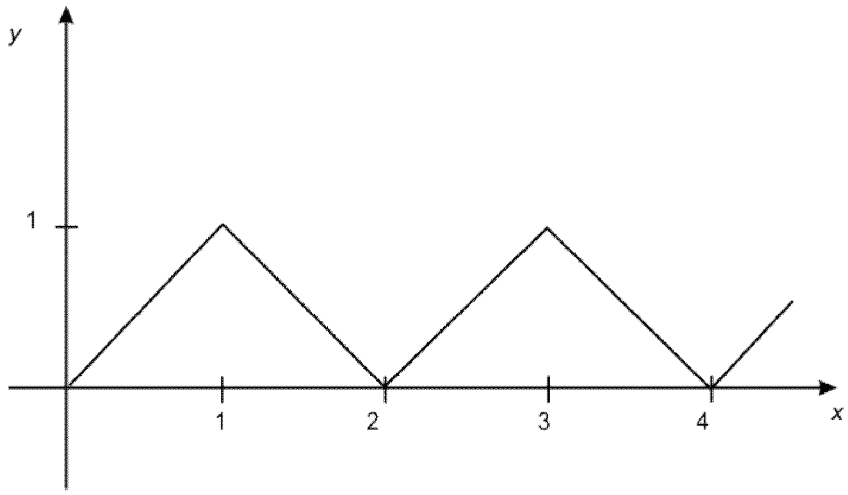
Se $f(t) = 0$ per $t < 0$, $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[f(t)]$.

Teorema 6. Sia $\tau > 0$ e per $t \geq 0$ risulti $f(t+\tau) = f(t)$, ovvero f sia una funzione periodica con periodo τ. Allora

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-s\tau}}\int_0^{\tau} f(t)e^{-st}dt\,, s > 0.$$ [2]

Esempio 7. Sia f così definita:

a) per $t \geq 0$, f sia periodica con periodo $\tau = 2$
b) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$



Si applica il teorema 6: calcolando gli integrali

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 t\,e^{-st}dt + \int_1^2 (2-t)e^{-st}\,dt\right)$$

si ottiene

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}\ \frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}},\ s > 0.$$

Esempio 8. La funzione $f(t) = |\operatorname{sen} t|$ è periodica, con periodo $\tau = \pi$.

Verificare che $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1+e^{-s\pi}}{1-e^{-s\pi}}\ \dfrac{1}{1+s^2}$.

---

[2] *Cfr.* pg.332 A. Laforgia, testo citato.

Trasformate di derivate e integrali.

Teorema. Siano f e f', rispettivamente una funzione continua e continua a tratti su un qualsiasi intervallo $[0, T]$. Si supponga inoltre che esistano tre costanti K, a e N tali che

$|f(t)| \le N e^{a t}$ per $t \ge K$. Allora esiste $\mathcal{L}[f'(t)]$ per $s > a$ e risulta

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0). \qquad (1)$$

La condizione $|f(t)| \le N e^{a t}$ per $t \ge K$ equivale ad asserire che f è esponenziale di ordine e^{at} per $t \to +\infty$.[3]

Per la derivata seconda si ottiene

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s^2\,\mathcal{L}[f(t)] - s\,f(0) - f'(0).$$

Applicazioni.

1. Calcolare $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\cos^2 at]$.

$f'(t) = -2\,a \cos at\ \operatorname{sen} at = -a \operatorname{sen} 2at$, $f(0) = 1$: quindi dalla (1)

$\mathcal{L}[-a \operatorname{sen} 2at] = s\,\mathcal{L}[\cos^2 at] - 1$. Quindi $\mathcal{L}[\cos^2 at] = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{2a^2}{4a^2+s^2}\right\} = \frac{2a^2+s^2}{s(4a^2+s^2)}$.

2. Calcolare $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\operatorname{sen}^2 at]$.
3. Calcolare $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t} \operatorname{sen}^2 t + t^4]$.

La trasformata di Laplace e le equazioni differenziali.

In molti casi è necessario ricavare $f(x)$ conoscendo la sua trasformata: è il problema di inversione della trasformata. Da $F(s)$ si deve ricavare $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(x)]$. Se risulta che

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_n(s)$$

allora $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \ldots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)$.

L'operatore $\mathcal{L}^{-1}$ è lineare.

[3] *Cfr.* pagina 334 testo citato.

1. Si risolva il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Applichiamo la (1) all'equazione assegnata: $y' – y = x$.

$\mathcal{L}[y'–y] = \mathcal{L}[x]$; $\mathcal{L}[y'] – \mathcal{L}[y] = s\mathcal{L}[y] – 1 – \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2}$.

$(s –1)\mathcal{L}[y] = 1 + \frac{1}{s^2}$; $\mathcal{L}[y] = \frac{1+s^2}{s^2}\ \frac{1}{s-1}$;

$\mathcal{L}[y] = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1}$; $A\,s\,(s-1) + B(s-1) + Cs^2 = s^2 + 1$;

$B – A = 0$; $A + C = 1$; $–B = 1$;

$B = –1$; $A = –1$; $C = 2$.

$y = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right] = -1 - x + 2\,e^{-x}$.

Controllare la soluzione con il metodo di risoluzione per le equazioni lineari del primo ordine.

2. Sia $y'' + 3\,y' + 2\,y = e^{5t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (2)

$\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] – f(0) = s\mathcal{L}[y] –1$,

$\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] – y'(0) \ – s\,y(0) = s^2\mathcal{L}[y] –3 –s$.

Applichiamo la trasformata di Laplace ad ogni termine della (2), ottenendo

$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[3\,y'] + \mathcal{L}[2\,y] = \mathcal{L}[e^{5t}]$

$s^2\mathcal{L}[y] –3 –s + 3\,s\mathcal{L}[y] – 3 + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-5}$

$\mathcal{L}[y] = \frac{s^2+s-29}{(s^2+3s+2)(s-5)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

$A(s^2 + 3s + 2) + B(s^2 – 3s –10) + C(s^2 – 4s –5) = s^2 + s –29$

$A = \frac{1}{42}$, $B = \frac{29}{6}$, $C = -\frac{27}{7}$.

Dunque

$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{42}\ \frac{1}{s-5} + \frac{29}{6}\ \frac{1}{s+1} - \frac{27}{7}\ \frac{1}{s+2}$,

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{42}\ \frac{1}{s-5}\right] = \frac{1}{42}\,e^{5t}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{29}{6}\ \frac{1}{s+1}\right] = \frac{29}{6}\,e^{-t}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{27}{7}\ \frac{1}{s+2}\right] = -\frac{27}{7}\,e^{-2t}$, $t \geq 0$

e infine

$y(t) = \frac{1}{42}\, e^{5t} + \frac{29}{6} e^{-t} - \frac{27}{7} e^{-2t}\,,\ t \geq 0.$