Integrazione per serie. Molto spesso non è possibile esprimere l'integrale di un'equazione differenziale mediante funzioni elementari, come le esponenziali, le logaritmiche, le funzioni razionali, le trigonometriche e le loro inverse; un esempio ben noto è l'equazione di Airy: $y'' - xy = 0$.

Supponiamo che l'integrale $f(x)$ dell'equazione assegnata sia una funzione analitica in x_0, che cioè coincida in un certo intorno di x_0 con la serie di Taylor associata a f, calcolata scegliendo come punto iniziale x_0; in questa ipotesi, cerchiamo l'espressione di f come serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Senza perdere in generalità, scegliamo $x_0 = 0$; i coefficienti a_n si determinano imponendo che la serie converga alla soluzione dell'equazione differenziale. Illustriamo questo procedimento con esempi di difficoltà via via crescente.

Esempio 1. Sia $y' = x$. La soluzione $y = f(x)$ si suppone analitica nell'origine:

(1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n + ...$

Se la serie converge, si può derivare termine a termine:

(2) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + ... + n\,a_n x^{n-1} + ...$

Torniamo a

$f'(x) = x$.

A primo e a secondo membro abbiamo due polinomi, che coincidono se e solo se i coefficienti omologhi sono uguali: quindi deve risultare

$a_1 = 0$,

$2\,a_2 = 1, \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

$3\,a_3 = 0, \rightarrow a_3 = 0$

…………………………

$n\,a_n = 0, \rightarrow a_n = 0$.

In conclusione, la soluzione è $y = f(x) = a_0 + \frac{1}{2}x^2$.

Esempio 2. $x\,y' = y$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n + ...$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} + ...$$

$$x\,f'(x) = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + ... + n a_n x^n + ... = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$$

Portando a sinistra il secondo membro:

$$-a_0 + a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + ... + (n-1)\,a_n x^n + ... = 0\,.$$

Tutti i coefficienti del polinomio a primo membro devono essere nulli:

$a_0 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ….. , $a_n = 0$, ….

La soluzione è data allora dalla funzione $y = a_1x$. Verificate il risultato, risolvendo ad esempio per variabili separabili.

Esempio 3. $y' = y + x^2,\ y(0) = 1.$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$y + x^2 = a_0 + a_1x + (a_2+1)x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Sostituendo nell'equazione assegnata:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots = a_0 + a_1x + (a_2+1)x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots.$$

Portando tutto a primo membro e raccogliendo le potenze con lo stesso esponente:

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2 - 1)x^2 + (4a_4 - a_3)x^3 + \ldots = 0$$

Uguagliando a zero tutti i coefficienti:

$a_1 = a_0$

$2\,a_2 - a_1 = 0, \qquad a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0$

$3a_3 - a_2 - 1 = 0, \quad a_3 = \dfrac{1}{3}(a_2 + 1) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\,a_0 + 1\right) = \dfrac{a_0 + 2}{3!}$

$4a_4 - a_3 = 0, \qquad a_4 = \dfrac{1}{4}\,a_3 = \dfrac{a_0 + 2}{4!}$

………………………

$a_n = \dfrac{a_0 + 2}{n!}$

……………………

$$f(x) = a_0 + a_0x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0+2}{3!}x^3 + \frac{a_0+2}{4!}x^4 + \ldots = -2 + (a_0+2) - 2x + (a_0+2)x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{a_0+2}{2!}x^2 + \frac{a_0+2}{3!}x^3 + \ldots$$

$$f(x) = -2 - 2x - \frac{x^2}{2} + (a_0+2) + (a_0+2)x + \frac{a_0+2}{2!}x^2 + \frac{a_0+2}{3!}x^3 + \ldots$$

$$f(x) = (a_0+2)\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right] - 2\left[1 + x + \frac{x^2}{2!}\right].$$

Poiché $f(0) = 1$, $1 = a_0 + 2 - 2$, $a_0 = 1$, la soluzione del problema ai valori iniziali è

$y = 3\,e^x - x^2 - 2x - 2$.

Risolvendo direttamente l'equazione differenziale $y' = y + x^2$:

$$A(x) = -\int dx = -x$$

$$e^{A(x)}(y' - y) = e^{A(x)}x^2, \qquad \left(e^{-x}y\right)' = x^2e^{-x}, \quad y\,e^{-x} = \int x^2e^{-x}dx.$$

$$y\,e^{-x} = -x^2e^{-x} + 2\int x\,e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2x\,e^{-x} - 2e^{-x} + c,$$
$$y = c\,e^{x} - x^2 - 2x - 2.$$

Infine, se $y(0) = 1$, allora $c = 3$.

Esempio 4. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$.

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots = a_0 + 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$$

$a_1 = a_0 + 1$

$2a_2 = a_1$, $\qquad a_2 = \frac{1}{2}\,a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + 1)$

$3\,a_3 = a_2$, $\qquad a_3 = \frac{1}{3}\,a_2 = \frac{1}{3\cdot 2}(a_0 + 1) = \frac{1}{3!}(a_0 + 1)$

$4\,a_4 = a_3$, $\qquad a_4 = \frac{1}{4}\,a_3 = \frac{1}{4\cdot 3!}(a_0 + 1) = \frac{1}{4!}(a_0 + 1)$

…………………..

$n\,a_n = a_{n-1}$, $\qquad a_n = \frac{1}{n!}\,(a_0 + 1).$

Da cui

$$y = a_0 + 1 - 1 + (a_0 + 1)x + \frac{1}{2!}(a_0 + 1)x^2 + \frac{1}{3!}(a_0 + 1)x^3 + \frac{1}{4!}(a_0 + 1)x^4 + \frac{1}{5!}(a_0 + 1)x^5 + \ldots =$$
$$= -1 + (a_0 + 1)\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots\right)$$

Quindi $y = (a_0 + 1)\,e^x - 1$. Considerando il valore in 0 di f, si conclude che $y = 2e^x - 1$.

Controlliamo il risultato risolvendo direttamente l'equazione differenziale:

$A(x) = -1$, $\quad e^{\int A(x)dx} = e^{-x}$.

$\left(y\cdot e^{-x}\right)' = e^{-x}\cdot 1, \quad y\cdot e^{-x} = \int e^{-x}dx, \quad y = e^{x}\left(-e^{-x} + c\right), \quad y = c\,e^{x} - 1.$ Imponendo $y(0) = 1$, si conclude che la soluzione coincide con quella trovata integrando per serie.

Esempio 5.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sostituendo y e y' nell'equazione data, in base alla (1) e alla (2),

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots$$

Perché i due polinomi siano uguali, deve risultare

$a_1 = 0$

$2a_2 = a_0$, $\quad a_2 = \frac{1}{2}\, a_0$

$3a_3 = a_1$, $\quad a_3 = \frac{1}{3}\, a_1 = 0$

$4a_4 = a_2$, $\quad a_4 = \frac{1}{4}\, a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\, a_0 = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} a_0$

$5a_5 = a_3$, $\quad a_5 = \frac{1}{5}\, a_3 = 0$

$6a_6 = a_4$, $\quad a_6 = \frac{1}{6}\, a_4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\, a_0 = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} a_0$

$7a_7 = a_5$, $\quad a_7 = \frac{1}{7}\, a_5 = 0$

$8a_8 = a_6$, $\quad a_8 = \frac{1}{8}\, a_6 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\, a_0 = \frac{1}{2^4 \cdot 4!} a_0$

……………………………

$$a_{2n-1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}\, a_0$$

Quindi $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = a_0\, e^{\frac{x^2}{2}}$.

Passiamo a considerare equazioni differenziali lineari del secondo ordine:

(3) $y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x)$.

Definizione. Un punto x_0 dell'intervallo I in cui si considera l'equazione (1) si dice ordinario se P e Q sono entrambe analitiche in x_0.

Osservazioni. Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono analitiche in x_0, anche le soluzioni di (1) sono analitiche nello stesso punto. Conviene scegliere $x_0 = 0$; mediante un'opportuna traslazione, i risultati si applicano anche in punti diversi dall'origine. Ovviamente, nel caso di equazioni lineari a coefficienti costanti, i coefficienti di y' e di y sono funzioni analitiche.

Esempio 6. $y'' = x^3$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n + ...$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + 4\, a_4 x^3 + ... + n\, a_n x^{n-1} + ...$$

(4) $$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 x + 4 \cdot 3\, a_4 x^2 + ... + n(n-1) a_n x^{n-2} + ...$$

Dall'uguaglianza imposta dall'equazione differenziale,

$y'' = x^3$, risulta:

$2\, a_2 = 0$

$3 \cdot 2\, a_3 = 0$

$4 \cdot 3\, a_4 = 0$

$5 \cdot 4\, a_5 = 1$

$6 \cdot 5\, a_6 = 0$

………….

La soluzione cercata è $f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{5 \cdot 4} x^5$.

Infatti, se $y'' = x^3$, allora $y' = \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c_1$, $y = \int y'\, dx = \int \left(\frac{1}{4}x^4 + c_1\right) dx = \frac{1}{5 \cdot 4} x^5 + c_1 x + c_2$.

Esercizio. Applicate il metodo esposto all'equazione $y'' + 5x - \frac{2}{3}x^4 = 0$.

Esempio 7. $y'' + y = 0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n + ...$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 x + 4 \cdot 3\, a_4 x^2 + ... + n(n-1) a_n x^{n-2} + ...$$

$y'' + y = (a_0 + 2a_2) + (a_1 + 3 \cdot 2 \cdot a_3)x + (a_2 + 4 \cdot 3 \cdot a_4)x^2 + (a_3 + 5 \cdot 4 \cdot a_5)x^3 + \cdots$

da cui

$a_0 + 2a_2 = 0,\qquad a_2 = -\frac{1}{2} a_0$

$a_1 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 0,\qquad a_3 = -\frac{1}{3!} a_1$

$a_2 + 4 \cdot 3 \cdot a_4 = 0,\qquad a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}\, a_2 = \frac{1}{4!}\, a_0$

$a_3 + 5 \cdot 4 \cdot a_5 = 0,\qquad a_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4}\;\; a_3 = \frac{1}{5!}\, a_1$

$a_4 + 6 \cdot 5 \cdot a_6 = 0,\qquad a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5}\, a_4 \;= -\frac{1}{6!}\, a_0$

$a_5 + 7 \cdot 6 \cdot a_7 = 0,\qquad a_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6}\;\; a_5 = -\frac{1}{7!}\, a_1$

…………………………

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2} a_0 x^2 - \frac{1}{3!} a_1 x^3 + \frac{1}{4!} a_0 x^4 + \frac{1}{5!} a_1 x^5 - \frac{1}{6!} a_0 x^6 - \frac{1}{7!} a_1 x^7 + \cdots$$

$$y = f(x) = a_0 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots\right)$$

Il lettore riconoscerà nelle somme gli sviluppi di MacLaurin relativi alle funzioni coseno e seno:

la soluzione dell'equazione differenziale è $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$.

Esempio 8. $y'' - y' = x$.

Utilizzando la (4) e la (1):

$$y''-y'=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1}=2a_2+3\cdot 2\,a_3x+4\cdot 3\,a_4x^2+....+n(n-1)a_nx^{n-2}+....$$
$$-a_1-2a_2x-3a_3x^2-4a_4x^3-.......=x$$

$y''-y'=$

$= 2a_2-a_1+(3\cdot 2a_3-2a_2)x+(4\cdot 3a_4-3a_3)x^2+(5\cdot 4a_5-4a_4)x^3+(6\cdot 5a_6-5a_5)x^4+\cdots=x$

Quindi

$2a_2-a_1=0$, $\qquad a_2=\frac{1}{2}a_1$

$3\cdot 2\,a_3-2\,a_2=1$, $\qquad a_3=\dfrac{2a_2+1}{3\cdot 2}=\dfrac{1}{3!}a_1+\dfrac{1}{3!}$,

$4\cdot 3\,a_4-3a_3=0,\quad a_4=\dfrac{3a_3}{4\cdot 3}=\dfrac{a_3}{4}$, $\qquad a_4=\dfrac{1}{4!}a_1+\dfrac{1}{4!}$,

…………………………………………………………….

$$y=a_0+a_1x+\frac{a_1}{2!}x^2+\frac{a_1}{3!}x^3+\frac{1}{3!}x^3+\frac{a_1}{4!}x^4+\frac{1}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^5+\frac{1}{5!}x^5+....=$$
$$=a_0-a_1+a_1\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^5+\frac{1}{5!}x^5+....\right)+$$
$$+\left(1-x-\frac{x^2}{2}\right)+\left(-1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^5+\frac{1}{5!}x^5+....\right)$$

In definitiva:

$y=a_1e^x+a_0-a_1-1-x-\frac{x^2}{2}+e^x=a_0+(a_1+1)e^x-\frac{1}{2}x^2-x-a_1-1.$

Controllate il risultato integrando direttamente l'equazione assegnata.