Proposizione 4. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti di

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

ogni altra soluzione della stessa equazione si scrive nella forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2\,y_2(x).$$

per una scelta opportuna delle costanti c_1 e c_2.

Vale a dire, non solo per ogni coppia di costanti c_1 e $c_2 \in \mathbf{R}$ la funzione $y(x) = c_1y_1(x) + c_2\,y_2(x)$ è soluzione di

$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$, ma variando in tutti i modi possibili le costanti stesse, si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione, nessuna esclusa; la funzione $y(x) = c_1y_1(x) + c_2\,y_2(x)$ costituisce l'integrale generale di $L(y) = 0$.

La dimostrazione di questo enunciato richiede alcune premesse.

Il teorema di esistenza e unicità ci assicura che una soluzione di $L(y) = y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$ è ben determinata quando sono noti i valori y_0 e y'_0 che $y(x)$ e $y'(x)$ assumono in x_0.
Affinché $y(x) = c_1y_1(x) + c_2\,y_2(x)$ sia soluzione di $L(y) = 0$ e soddisfi le condizioni iniziali, occorre che

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y'(x_0) \end{cases}.$$

Il sistema va risolto nelle incognite c_1 e c_2; il sistema dà soluzioni se il determinante

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0)\cdot y_1'(x_0)$$ è diverso da zero.

L'oggetto rappresentato dalla funzione $W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x)$ possiede delle proprietà molto utili per i nostri scopi; per definizione, $W(x)$ è il wronskiano di $y_1(x)$ e $y_2(x)$. A noi interessa quando $W(x) \neq 0$.

Teorema. Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due qualunque soluzioni di $L(y) = 0$ su $[a, b]$. Sia $W= W(x)$ il loro wronskiano.

Si danno allora soltanto due possibilità:

a) W è identicamente nullo su $[a, b]$.

b) W non è mai nullo su $[a, b]$.

Dimostrazione. Le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono per ipotesi soluzioni di $L(y) = 0$, quindi

$$\begin{cases} y_1''(x)+P(x)y_1'+Q(x)\,y_1=0 \\ y_2''(x)+P(x)y_2'+Q(x)\,y_2=0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per y_2 e la seconda per y_1; sottraiamo poi membro a membro:

$(y_1\,y_2'' - y_2\,y_1'') + P(x)\,(y_1\,y_2' - y_2\,y_1') + Q(x)\,(y_1\,y_2 - y_2\,y_1) =$

$= (y_1\,y_2'' - y_2\,y_1'') + P(x)\,(y_1\,y_2' - y_2\,y_1') = 0 \qquad \text{(w)}$

Essendo $W(x) = y_1\,y_2' - y_2\,y_1'$, derivando si ottiene:

$W'(x) = y_1\, y_2'' + y_1'\, y_2' - y_2\, y_1'' - y_2'\, y_1' = y_1\, y_2'' - y_2\, y_1''$.

Quindi la (w) si può scrivere

$$W'(x) + P(x)\, W(x) = 0$$

che è un'equazione differenziale avente come incognita $W(x)$; l'integrale generale è dato da

$$W(x) = c\, e^{-\int P(x)dx}.$$

La funzione esponenziale è sempre ≠ 0, dunque $W(x)$ si annulla solamente se $c = 0$. In tal caso però risulta che $W(x) = 0 \ \forall\, x \in [a, b]$, cioè il wronskiano coincide con la funzione identicamente nulla. QED

Ora vogliamo dimostrare che il wronskiano di due soluzioni linearmente indipendenti di $L(y) = 0$ è sempre ≠ 0.

Teorema. Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due integrali dell'equazione omogenea assegnata su $[a,b]$. Condizione necessaria e sufficiente perché $y_1(x)$ e $y_2(x)$ siano linearmente dipendenti è che il loro wronskiano sia identicamente nullo su $[a,b]$.

Dimostrazione. Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluzioni linearmente dipendenti: allora $W(x)$ è identicamente nullo.

Se una delle due soluzioni, ad esempio $y_1(x)$ *è identicamente nulla* e quindi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente dipendenti, allora ovviamente $W(x)=0$. Supponiamo che nessuna delle due sia identicamente nulla: se sono linearmente dipendenti, risulta $y_2(x) = k\, y_1(x)$ e dunque $y_2'(x) = k\, y_1'$.

$W(y_1(x), y_2(x)) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x) = y_1(x)\, k\, y_1'(x) - k\, y_1(x)\, y_1'(x) = 0$. In conclusione, se y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente dipendenti allora $W(x)=0$.

Vediamo l'inverso. Se $W(x)=0$, ci sono due possibilità: una delle due funzioni è nulla e allora y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente dipendenti. In caso contrario, sia y_1 diversa dalla funzione nulla: esiste un intervallo $[a',b']$ contenuto in $[a,b]$ in ogni punto del quale $y_1 \neq 0$. Se $W(x)=0$ in $[a,b]$ e quindi anche in $[a',b']$, allora

$$\frac{y_1(x)\, y'_2(x) - y_2(x)\, y'_1(x)}{y_1^2(x)} = 0, \ \forall\, x \in [a',b'],$$

ciò significa che la derivata di $y_2(x) / y_1(x)$ è nulla in un certo intervallo e quindi $y_2(x) / y_1(x)$ è costante su tale intervallo: $\frac{y_2}{y_1} = k$. In conclusione le funzioni sono linearmente dipendenti in $[a',b']$. La derivata di $y_2(x)$ è $y_2'(x) = k\, y_1'(x)$. In ogni punto $\bar{x}$ di $[a',b']$, $y_2(\bar{x}) = k\, y_1(\bar{x})$ e $y_2'(\bar{x}) = k\, y_1'(\bar{x})$. Per *il teorema di esistenza e unicità,* essendo $y_2(x)$ e $k\, y_1(x)$ entrambe soluzioni di $L(y) = 0$, devono coincidere su $[a, b]$: $y_2(x) = k\, y_1(x)$ su $[a, b]$, dunque sono linearmente dipendenti. Q.E.D.

Corollario. Se y_1 *e* y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti di $L(y) = 0$ e $\bar{y}$ è una soluzione di $L(y) = R(x)$, ogni altra soluzione di $L(y) = R(x)$ si scrive nella forma

$$y(x) = \bar{y}(x) + c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

per opportuni valori delle costanti c_1 e c_2.

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che $y(x) = \bar{y}(x) + c_1y_1(x) + c_2 y_2(x)$ è soluzione di $L(y) = R(x)$ (Proposizione 2). Inversamente, sia $\bar{\bar{y}}(x)$ una qualsivoglia soluzione di $L(y) = R(x)$. Vogliamo dimostrare che essa si può scrivere come

$$\bar{\bar{y}}(x) = \bar{y}(x) + c_1y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

per una scelta opportuna delle costanti c_1 e c_2. Infatti $\bar{\bar{y}} - \bar{y}$ è una soluzione di $L(y) = 0$ e dunque si può scrivere come opportuna combinazione lineare delle soluzioni linearmente indipendenti:

$$\bar{\bar{y}}(x) - \bar{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

da cui la tesi. Q.E.D.

Come si è visto, l'integrale generale delle equazioni del secondo ordine, omogenea o meno, contiene due parametri c_1 e c_2. Una singola soluzione si otterrà imponendo certe condizioni che la soluzione stessa deve soddisfare: le condizioni sono due perché due sono i parametri da determinare. Generalmente tali condizioni consistono nei valori che devono assumere la funzione incognita e la sua derivata prima in un punto assegnato x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

In questo caso l'operatore lineare assume la forma $L(y) = y'' + a\,y' + by$, con a e b costanti reali assegnate; le equazioni omogenee corrispondono a $L(y) = 0$ e quelle non omogenee a $L(y) = R(x)$.

Per le omogenee è fondamentale determinare due soluzioni y_1 *e* y_2 linearmente indipendenti in modo che l'integrale generale è espresso da $y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Torniamo a considerare le equazioni differenziali del primo ordine, lineari e omogenee:

$$y' + ay = 0.$$

Questa equazione sicuramente ammette soluzioni di tipo esponenziale $y(x) = ce^{-ax}$, $c \in \mathbf{R}$.

Infatti
$$y'(x) = -c\,a\,e^{-ax}$$
$$a\,y(x) = c\,a\,e^{-ax}$$
$$\overline{}$$
$$y'(x) + a\,y(x) = 0.$$

Quindi conviene cercare soluzioni di $L(y) = 0$ nella forma di $x \to e^{\lambda x}$, ove lambda è un parametro da determinare. Risulta

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Quindi sostituendo in $y'' + a\,y' + by = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b\,e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$

Essendo $e^{\lambda x} \neq 0\ \forall x \in \boldsymbol{R}$, affinché $L(e^{\lambda x}) = 0$ è necessario e sufficiente che sia $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$;
questa equazione è detta *equazione caratteristica*. <u>Dalle soluzioni dell'equazione caratteristica ricaviamo gli integrali di $L(y) = 0$.</u> Si presentano tre casi distinti, a seconda che il discriminante Δ dell'equazione caratteristica sia maggiore, uguale o minore di zero.

1° Caso: $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica è dotata di due radici reali distinte, λ_1 e λ_2. Le funzioni $y_1(x) = e^{\lambda 1x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda 2x}$ sono due integrali linearmente indipendenti di $L(y) = 0$, dunque idonei a determinare l'integrale generale $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ di $L(y) = 0$.

Esempio. $L(y) = y'' - 3y + 2 = 0$. L' *equazione caratteristica* associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, che è risolta da $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. L'integrale generale è $y(x) = c_1 e^{x} + c_2{}^{2x}$. Cerchiamo la soluzione che soddisfa $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Per $x = 0$ otteniamo $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$, da cui $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$. La soluzione cercata è quindi $y(x) = -e^{2x} + 2e^{x}$.

2° Caso: $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica fornisce la soluzione doppia λ_0. Le soluzioni di $L(y) = 0$ sono $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$ e $y_2(x) = x\, e^{\lambda_0 x}$: queste soluzioni sono linearmente indipendenti in quanto il loro rapporto è x, una funzione e non una costante. Verifichiamo che $y_2(x) = x\, e^{\lambda_0 x}$ è effettivamente una soluzione di $y'' + a\, y' + by = 0$. Risulta:

$$y_2(x) = x\, y_1(x)$$

$$y_2'(x) = y_1(x) + x\, y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = y_1'(x) + y_1'(x) + x\, y_1''(x)$$

$$y_2'' + a\, y_2' + by_2 = 2\, y_1'(x) + x\, y_1''(x) + a(y_1(x) + x\, y_1'(x)) + b\, x\, y_1(x) =$$

$$= x(y_1''(x) + a\, y_1'(x) + b\, y_1(x)) + 2\, y_1'(x) + ay_1(x) =$$
$$= x \cdot 0 + 2\, \lambda_0\, e^{\lambda_0 x} + a\, e^{\lambda_0 x} = e^{\lambda_0 x}(2\, \lambda_0 + a)\, .$$

Ma λ_0 è soluzione doppia di $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$: il coefficiente a è pari all'opposto della somma delle radici, dunque $2\, \lambda_0 + a = 0$. In definitiva $y_2(x) = x\, e^{\lambda_0 x}$ è soluzione di $L(y) = 0$ e l'integrale generale di $y'' + a\, y' + by = 0$ è $y(x) = c_1\, e^{\lambda_0 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0 x}$.

Esempio. $y'' - 2\, y' + y = 0$. $\Delta = 4 - 4 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $y(x) = c_1 e^{x} + c_2\, x\, e^{x}$. Cerchiamo la soluzione per cui $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Risulta $y(0) = c_1 = 0$, $y'(0) = c_1 + c_2 = 2$. La soluzione che soddisfa le condizioni iniziali è

$y(x) = 2\, x\, e^{x}$.

3° Caso: $\Delta < 0$.

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + i\sqrt{|\Delta|}\right) = \alpha + i\,\beta$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - i\sqrt{|\Delta|}\right) = \alpha - i\,\beta$$
$$\text{con } \alpha = -\frac{a}{2} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

Ricordando la formula di Eulero, abbiamo le soluzioni a valori complessi

$$e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x\right),\ e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x\right).$$

Ci interessano però le funzioni a valori reali: sostituiamo alle precedenti soluzioni due loro combinazioni lineari, ottenute sommando e sottraendo membro $e^{\lambda 1 x}$ e $e^{\lambda 2 x}$:

- sostituiamo $e^{\lambda 1 x}$ con $e^{\alpha x}$ (cos βx) e $e^{\lambda 2 x}$ con $e^{\alpha x}$ (sen βx).

E' facile verificare che queste soluzioni sono linearmente indipendenti e idonee dunque a costruire l'integrale generale.

Esempio. $y'' + y = 0$. Equazione caratteristica: $\lambda^2 + 1 = 0$, soluzioni $y_1 = e^{ix}$ e e^{-ix}, che rimpiazziamo con "cos x" e "sen x" . Integrale generale: $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. La soluzione particolare per cui $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ si ricava da

$$y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1 = 0, \quad y'(0) = -c_1 \operatorname{sen}(0) + c_2 \cos(0) = c_2 = 2.$$

La soluzione cercata è $y = 2$ sen x.

<u>Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti.</u>

Introduciamo il cosiddetto *metodo di somiglianza* (o *dei coefficienti indeterminati*). Data un'equazione lineare del secondo ordine $L(y) = R(x)$, troviamo innanzitutto la soluzione generale di $L(y) = 0$: come sappiamo, l'integrale generale di $L(y) = R(x)$ è dato da $c_1y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}$, ove $c_1y_1(x)$ e $c_2 y_2(x)$ sono soluzioni linearmente indipendenti della equazione differenziale omogenea e $\bar{y}$ è una qualunque soluzione di $L(y) = R(x)$.

Il caso più semplice è quello in cui $R(x) = k$. Vediamo un esempio: $L(y) = y'' - 6y' + 5y = 3$. Il fatto che $R(x) = 3$, suggerisce di cercare un integrale particolare della non omogenea della forma $\bar{y} = k$.

$\bar{y} = k$

$\bar{y}' = 0$

$\bar{y}'' = 0.$

Sostituendo, si ottiene $5k = 3 \rightarrow y = \frac{3}{5}$, quindi $\bar{y} = \frac{3}{5}$. L'integrale generale di $L(y) = 0$ si ottiene considerando l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, che ha il discriminante $\Delta = 9 - 5 = 4 > 0$ e soluzioni 1 e 5: l'integrale generale della omogenea è $c_1 e^x + c_2 e^{5x}$. Tornando a $y'' - 6y' + 5y = 3$, l'integrale generale è offerto da $y = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + \frac{3}{5}$.

Il passo successivo è rappresentato dalla soluzione di $L(y) = P_n(x)$, ove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n in x.

Sia $y'' - 3y' + y = x^2 + 1$. Per il metodo di somiglianza, supponiamo che $\bar{y}$ sia un polinomio in x. Se la soluzione particolare dell'equazione è un polinomio di grado n, $\bar{y}'$ sarà di grado $n = n - 1$ e $\bar{y}''$ un polinomio di grado $n - 2$: se la sostituzione di $\bar{y}$ in $L(y)$ deve portare a x^2+1, il grado di $\bar{y}$ deve essere uguale a 2.

$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$

$\bar{y}' = 2Ax + B$

$\bar{y}'' = 2A.$

Sostituendo in $y'' - 3y' + y = x^2 + 1$, otteniamo :

$2A - 3(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$,

$Ax^2 + (B - 6)x + 2A - 3B + C = x^2 + 1.$

In base al principio di identità dei polinomi deve essere

$$\begin{cases} A = 1 \\ -6A + B = 0 \\ 2A - 3B + C = 1 \end{cases}$$

$A = 1$, $B = 6$, $C = 17$. La soluzione cercata è $x^2 + 6x + 17$ e infine l'integrale generale di $y'' - 3y' + y =$ $= x^2 + 1$ è dato da $y = c_1e^x + c_2e^{5x} + x^2 + 6x + 17$.