Queste dispense rappresentano gli appunti relativi alla prima parte del corso di Analisi Matematica (a.a. 2012/13). Essi sono stati redatti e messi a disposizione dallo studente Nicola Russo. A lui vanno i ringraziamenti del docente e, sicuramente, di tutti gli studenti frequantanti il corso.

Appunti di Analisi Matematica

6 dicembre 2012

Indice

Capitolo 1

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e i suoi sottoinsiemi

1.1 Struttura algebrica e assiomi fondamentali dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ verrà introdotto mediante un certo numeri di assiomi (o postulati) che ne definiscono la struttura algebrica. Tale struttura verrà completata formulando e ampliando via via l'assiomatica delle sottoclassi numeriche di $\mathbb{R}$. Partiamo dalla definizione di $\mathbb{N}$ **insieme dei numeri naturali** e consideriamo la relazione di uguaglianza(=) e le operazioni di somma(+) e prodotto(*).

1.1.1 *Assiomi fondamentali rispetto alla relazione di uguaglianza*

Attaverso la relazione di uguaglianza $a = b$, con $a, b \in \mathbb{N}$, si stabilisce che i simboli a e b identificano lo stesso numero naturale.

Assioma primo

Proprietà riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = a$$

Assioma secondo

Proprità simmetrica:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} / a = b \Rightarrow b = a$$

Assioma terzo

Proprietà transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} / a = b \quad e \quad b = c \Rightarrow a = c$$

Questi assiomi saranno validi anche per i successivi insiemi che introdurremo.

1.1.2 *Assiomi fondamentali rispetto all'operazione di somma e prodotto*

Assioma primo

Chiusura di $\mathbb{N}$ rispetto somma e prodotto:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}, a * b \in \mathbb{N}.$$

Assioma secondo

Proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b = b + a$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a * b = b * a$$

Assioma terzo

Proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

Assioma quarto

Proprietà distributiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a + b) * c = a * b + a * c$$

Assioma quinto

Assioma dell'esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto:

$$\exists' 1' \in \mathbb{N} / \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a * 1 = a$$

1.1.3 L'insieme $\mathbb{N}_0$

Sulla base degli assiomi appena definiti è possibile dimostrare altre proprietà come ad esempio **l'unicità** dell'elemento neutro rispetto al prodotto[1]. Introduciamo ora il simbolo '0' (zero) e dunque il sottoinsieme $\mathbb{N}_0$ tale che $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$, dove appunto $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$. Tutti gli assiomi precedenti valgono (ovviamente) anche per $\mathbb{N}_0$ (basta sostituire $\mathbb{N}$ con $\mathbb{N}_0$), tuttavia introduciamo un assioma per caratterizzare il nuovo elemento (zero):

Assioma dell'esistenza dell'elemento neutro rispetto la somma

$$\exists' 0' \in \mathbb{N}_0 / \forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a + 0 = a.$$

(possiamo dimostrarne **l'unicità**[2].).

Definizione

$\forall a \in \mathbb{N}_0$ si dice successivo di a l'elemento $a+1$.

Grazie all'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma, è possibile, mediante questo processo generare sempre un numero naturale nuovo (diverso cioè da tutti quelli precedentemente costruiti); di conseguenza si dirà che l'insieme $\mathbb{N}_0$ contiene infiniti elementi.

Definizione

Insieme A è induttivo se:

$$\begin{cases} 1 \in A \\ \forall a \in A \Rightarrow a + 1 \in A \end{cases}$$

Dalle definizioni di cui sopra deduciamo che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$ sono insiemi induttivi per definizione.

1.2 L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$

L'impossibilità di risolvere equazioni del tipo $x+a = 0$ (nell'insieme $\mathbb{N}_0$) porta alla definizione di un nuovo "ente numerico"che gode di questa proprietà e che indicheremo con il simbolo $''-a''$. Ovviamente questa introduzione porta ad ampliare l'insieme dei numeri naturali e quindi alla definizione dell'insieme $\mathbb{Z}$ tale che $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$. Per l'insieme $\mathbb{Z}$ si stabilisce la validità dei sei assiomi precedenti(più gli assiomi della relazione di uguaglianza) e se ne introduce un settimo per caratterizzare l'elemento opposto.

[1]per questa dimostrazione consultare questo link

[2]per questa dimostrazione consultare questo link

1.2.1 *Assioma dell'elemento opposto*

$$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + (-a) = 0$$

possiamo inoltre dimostrare la sua **unicità**[3].

Teorema

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a * (-b) = (-a) * b = -ab.$$

Dimostrazione

Si ha che $a * (-b) + a * b = a * (b + (-b)) = a * 0 = 0$. Analogamente $(-a) * b + a * b = b * ((-a) + a) = b * 0 = 0$. Quindi sia il numero $a * (-b)$ che $(-a) * b$ operano come opposto di ab. Dall'unicità dell'elemento opposto segue la tesi.

Teorema

$$\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(-a) = a.$$

Dimostrazione

Si ha che $-(-a) = -(-a) + (-a) + a = a + 0 = a$

Si osservi inoltre che la somma degli opposti di due numeri naturali non è un numero naturale.

1.2.2 *Assiomatica dell'ordine di $\mathbb{Z}$*

Resta intrinsecamente definito un ordinamento tra i numeri interi. Infatti diremo che:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}$$

$$a > b \quad se \quad a + (-b) \in \mathbb{N}$$

$$a \geq b \quad se \quad a + (-b) \in \mathbb{N}_0$$

$$a < b \quad se \quad (-a) + b \in \mathbb{N}$$

$$a \leq b \quad se \quad (-a) + b \in \mathbb{N}_0$$

$\mathbb{Z}$ è un insieme ordinato.

---

[3]per questa dimostrazione consultare questo link

1.2.3 *Riflessione sulla cardinalità di* $\mathbb{Z}$

E' lecito pensare all'insieme $\mathbb{Z}$ come ad una "scatola"che contiene un numero di "entità"pari al doppio(più uno, lo zero) di quelli contenuti in $\mathbb{N}$? Per poter rispondere correttamente bisogna innanzitutto fare una precisazione: quando parliamo di insiemi numerici non parliamo di numerosità bensì di *cardinalità*. Mediante la definizione operativa di "successivo di un numero"(valida sia per $\mathbb{N}$ che per $\mathbb{Z}$) è evidente che è possibile generare infiniti numeri, ed è per questo motivo che non ha molto senso parlare di numerosità. La cardinalità di $\mathbb{Z}$ è uguale alla cardinalità di $\mathbb{N}$ in quanto è possibile stabilire una relazione biunivoca per ogni elemento di questi due insiemi. Paradossalmente, dunque, questi insiemi hanno lo stesso numero di elementi.

1.3 L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$

Come per $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$, anche $\mathbb{Z}$ risulta essere un insieme induttivo. Tuttavia in $\mathbb{Z}$ non è possibile risolvere operazioni quali ad esempio $x*a = 0$ (seguirebbe una dimostrazione), e per questo motivo introduciamo un nuovo ente numerico che gode di tale proprietà e che indicheremo con il simbolo a^{-1} o $1/a$. Questa introduzione rende necessario un ampliamento di $\mathbb{Z}$. Introduciamo l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ nel modo seguente:

$\mathbb{Q} = \{\ n * d^{-1} : n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad d \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Ovviamente si ha che $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.3.1 *Assioma dell'elemento inverso*

Per l'insieme $\mathbb{Q}$ si stabilisce la validità dei sette assiomi su scritti(si sostituisca $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$) e di quella del seguente ulteriore assioma:

$$\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow a * a^{-1} = 1$$

(proprietà dell'elemento inverso). Anche in questo caso possiamo dimostrare *l'unicità* dell'elemento inverso[4].

Gli 8 assiomi stabiliti per $\mathbb{Q}$ si dicono assiomi di campo. In algebra tutti gli insiemi la cui struttura è caratterizzata da una assiomatica come quella dei numeri razionali si dicono "campi"; si dirà allora il campo dei numeri razionali.

[4]per questa dimostrazione consultare questo link

1.3.2 *Assiomatica dell'ordine di* $\mathbb{Q}$

Anche in $\mathbb{Q}$ è possibile stabilire un ordine mediante una opportuna assiomatica (detta appunto dell'ordine).Si evidenzia in $\mathbb{Q}$ un particolare sottoinsieme $\mathbb{Q}^+$, cosiddetto dei numeri razionali positivi, e si stabiliscono per esso i seguenti tre assiomi:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}^+ \quad e \quad a * b \in \mathbb{Q}^+$$

$$\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}^+ \quad oppure \quad (-a) \in \mathbb{Q}^+$$

$$0 \notin \mathbb{Q}^+$$

Questo ci consente di definire una relazione d'ordine come segue:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}$$

$$a > b \quad se \quad a + (-b) \in \mathbb{Q}^+$$

$$a \geq b \quad se \quad a + (-b) \in \mathbb{Q}^+ \quad oppure \quad a = b$$

$$a < b \quad se \quad (-a) + b \in \mathbb{Q}^+$$

$$a \leq b \quad se \quad (-a) + b \in \mathbb{Q}^+ \quad oppure \quad a = b$$

Ne segue che $\mathbb{Q}$ è un insieme induttivo, tuttavia, fissato $a \in \mathbb{Q}$ è impossibile definire l'elemento successivo di a (o, in altri termini l'elemento $b \in \mathbb{Q}$ tale che tra a e b non vi siano altri numeri razionali). Infatti tra numeri razionali distinti a, b si interpone sempre il numero razionale $(a + b)/2$; e così tra a e $(a + b)/2$ si interpone sempre il numero razionale $(3a + b)/4$; e così via all'infinito, non consentendo la determinazione del numero razionale successivo di a. Tale differenza tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ viene evidenziata classificando $\mathbb{Z}$ come insieme discreto (lo sono anche $\mathbb{N}$ e tutti gli insiemi finiti), mentre $\mathbb{Q}$ come insieme non discreto. Al contrario di come potrebbe sembrare $\mathbb{Q}$ non è un insieme numerico continuo, in quanto è possibile ancora stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$, ossia posizionare secondo un particolare ordinamento ciascun numero razionale; diremo in tal senso che $\mathbb{Q}$ è un insieme numerico numerabile.

1.4 Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

1.4.1 *Maggiorante e minorante di un insieme*

Definizione

Sia A insieme tale che $A \subset \mathbb{Q}$. $M \in \mathbb{Q}$ si dice maggiorante di A se $M \geq x$ $\forall x \in A$.

Definizione

Sia A insieme tale che $A \subset \mathbb{Q}$. $m \in \mathbb{Q}$ si dice minorante di A se $m \leq x$ $\forall x \in A$.

Definizione

Sia A insieme tale che $A \subset \mathbb{Q}$. Allora A è limitato superiormente se ammette maggiorante.

Definizione

Sia A insieme tale che $A \subset \mathbb{Q}$. Allora A è limitato inferiormente se ammette minorante.

Da queste definizioni possiamo dedurre che, se un insieme non ammette maggiorante(minorante), allora questo è illimitato superiormente(inferiormente).Ad esempio $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^+$ non ammettono maggioranti. E' utile inoltre osservare che un insieme di infiniti elementi può essere limitato(inferiormente e/o superiormente) come ad esempio l'insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{Q}/x = 1/n, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

1.4.2 *Massimo e minimo di un insieme*

Definizione

Sia A insieme tale che $A \subset \mathbb{Q}$. $M \in \mathbb{Q}$ si dice massimo di A se:

$$\begin{cases} M \geq x & \forall x \in A \\ M \in A \end{cases}$$

Definizione

Sia A insieme tale che $A \subset \mathbb{Q}$. $m \in \mathbb{Q}$ si dice minimo di A se:

$$\begin{cases} m \leq x & \forall x \in A \\ m \in A \end{cases}$$

1.4.3 *Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme*

Dato $A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente esiste il più piccolo dei maggioranti? ovvero:

$$\exists \Lambda \in \mathbb{Q} /$$

$$\begin{cases} x \leq \Lambda \quad \forall x \in A \\ \forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad \exists X \in A \quad / \quad X > \Lambda - \epsilon \end{cases}$$

Questa definizione operativa ci permette di verificare l'esistenza dell'estremo estremo superiore di un insieme. E' utile osservare che: ϵ è un numero molto piccolo a piacere(sarà sempre considerato tale in futuro); se esiste Λ è **unico**; inoltre se A ammette massimo questo è anche il più piccolo dei maggioranti. Ovviamente possiamo definire l'estremo inferiore sostituendo la relazione $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad \exists X \in A \quad / \quad X > \Lambda - \epsilon$ con $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad \exists X \in A \quad / \quad X < \Lambda + \epsilon$ e l'espressione $x \leq \Lambda \quad \forall x \in A$ con $x \geq \Lambda \quad \forall x \in A$.

1.5 L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$

L'impossibilità di risolvere equazioni del tipo $x^2 - 2 = 0$ in $\mathbb{Q}$ e la conseguente impossibilità di determinare per (infiniti) sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ l'estremo superiore[5], ci porta a definire un nuovo "ente numerico" che chiameremo numero irrazionale, e di conseguenza un nuovo insieme numerico che li contenga tutti detto insieme dei numeri reali:

$$\mathbb{R} = \{SupA \quad : \quad A \in \mathbb{Q} \quad lim.sup.\}$$

e si ha che:

$$\begin{cases} \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \\ \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing \end{cases}$$

[5]ad esempio $A = \{ \ x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 2 \ \}$

dove con $\mathbb{I}$ indichiamo tutti gli irrazionali. Tutti gli assiomi di campo e di ordine vengono "ereditati" da $\mathbb{R}$, oltre alle definizioni di maggiorante(minorante), massimo(minimo) ed estremo superiore(inferiore) alle quali basta sostituire $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$[6].

1.5.1 *Assioma di completezza*

Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente(o inferiormente), non vuoto, allora $\exists$ estremo superiore(inferiore) di A.

Da questa definizione possiamo dedurre, da un punto di vista geometrico, che è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e la retta orientata, ovvero che $\mathbb{R}$ è continuo e, dunque, non numerabile. Ne segue che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ sono "densi" in $\mathbb{R}$ ovvero che tra due numeri reali ci sono infiniti numeri appartenenti a $\mathbb{Q}$ (e $\mathbb{I}$).

1.5.2 *Definizione di intervallo, intorno sferico ed intorno bucato*

[7]

Si considerino gli insiemi così definiti:

$$\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} & : \quad 0 < x < 1\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} & : \quad 0 \leq x < 1\} \\ C = \{x \in \mathbb{R} & : \quad 0 < x \leq 1\} \\ D = \{x \in \mathbb{R} & : \quad 0 \leq x \leq 1\} \end{cases}$$

Ciascuno degli insiemi A, B, C, D considerati nell'esempio rappresenta un intervallo. La definizione che segue ci dice cosa sono gli intervalli.

Definizione

Diciamo **intervallo chiuso** di estremi a e b e lo indichiamo con [a, b] l'insieme dei numeri reali tali che:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a \leq x \leq b\}$$

Diciamo invece **intervallo aperto** di estremi a e b e lo indichiamo con (a, b) l'insieme dei numeri reali tale che:

---

[6] per queste definizioni consultare questo link

[7] per la definizione di intervallo(prima parte di questo sottocapitolo) si fa riferimento all'esempio 3.3 (pag.58) del libro di testo Calcolo Differenziale e Integrale di Andrea Laforgia

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a < x < b\}$$

Infine con [a, b) e (a, b] intendiamo, rispettivamente, l'insieme dei numeri reali tali che:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad a < x \leq b\}$$

Ciascuno degli insiemi $(a, b]$ e $[a, b)$ è detto intervallo semiaperto. Per ogni tipo di intervallo(aperto, semiaperto, chiuso) i numeri a e b sono detti **estremi dell'intervallo**. Gli insiemi A, B, C, D considerati nell'esempio sono, nell'ordine, aperto, semiaperto, semiaperto e chiuso.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Si dice **intorno sferico** di centro x_0 e raggio δ l'intervallo:

$$I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Si dice intorno bucato l'insieme:

$$I_\delta(x_0) - \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

1.5.3 *Punto interno e punto di accumulazione di un insieme*

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in A$ si dice punto interno di $A(x_0 \in \mathring{A})$[8] se $\exists \delta > 0 \quad / \quad I_\delta(x_0) \subseteq A$.

Definizione

$x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ se $\forall \delta > 0$ risulta:

$$I_\delta(x_0) - \{x_0\} \cap A \neq \varnothing$$

Si definisce **insieme derivato** di A l'insieme $Đ_A$, ovvero l'insieme dei punti di accumulazione di A.

[8] con il simbolo $\mathring{A}$ ci si riferisce all'insieme dei punti interni di A

Definizione

Sia $x_0 \in A$ tale che $x_0 \notin \ \text{Đ}_A$. Allora x_0 si dice punto isolato di A.

1.6 Il metodo d'induzione

[9]

Tra i metodi che i matematici prediligono per dimostrare asserzioni che riguardano i numeri interi positivi un posto di rilievo è occupato dal *metodo di dimostrazione per induzione*. Questo metodo rappresenta un procedimento generale che si applica quando occore provare proprietà che si riferiscono a tutti gli interi positivi. In pratica il metodo si basa sull'applicazione del teorema noto come *principio di induzione*.

1.6.1 *Principio di induzione*

Sia A un insieme di interi positivi.Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} 1 \in A \\ Se \quad k \quad appartiene \quad ad \quad A, \quad allora \quad anche \quad k+1 \quad vi \quad appartiene. \end{cases}$$

allora ogni numero intero positivo appartiene ad A.

1.6.2 *Applicazione pratica del metodo d'induzione*

Supponiamo di dover dimostrare una che certa proprietà $P(n)$ è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Il primo (semplice) passo consiste nel verificare che $P(n)$ sia verificata per $n = 1$. Fatto ciò occorre supporre (cioè ammettere come **ipotesi**) che la proprietà $P(n)$ sia vera per $n = \overline{n}$ ovvero per un *particolare numero naturale* e, da questa, dedurre che anche $P(\overline{n}+1)$ è vera. Il verificarsi della tesi, assicura il principio d'induzione, è sufficente per concludere che $P(n)$ vale per ogni intero positivo. Segue un esempio.

Esempio

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad 27^n - 1$ è un multiplo di 13.

Per $n = 1 \Rightarrow \quad 27^1 - 1 = 13 * 2$. Dunque risulta che $P(1)$ è vera.

[9]Tratto dal Capitolo quarto del libro di testo Calcolo Differenziale e Integrale di Andrea Laforgia

Ipotesi

Fissato $\overline{n}$, $\exists x \in \mathbb{N}$ tale che $27^{\overline{n}} - 1 = 13 * x$.

Tesi

$\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $27^{\overline{n}+1} - 1 = 13 * k$

Dimostrazione

$27^{\overline{n}+1} - 1 = 27 * 27^{\overline{n}} - 1 = 27 * 27^{\overline{n}} - 27 + 26 \Rightarrow \quad 27 * (\underbrace{27^{\overline{n}} - 1}_{=13*x}) + 13 * 2 =$
$27 * 13 * x + 13 * 2 = 13 * (27 * x + 2)$. Dunque $k \in \mathbb{N}$, e in particolare risulta $k = 27 * x + 2$. Concludiamo che la proprietà risulta essere vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Capitolo 2

Funzione reale di variabile reale

2.1 Introduzione al concetto di funzione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo *funzione* da A ad B e la indichiamo con il simbolo $f : A \to B$ la legge che a ogni elemento $a \in A$ associa uno ed un solo elemento $b \in B$ e scriveremo $b = f(a)$. Ciò che la definizione garantisce non è soltanto l'esistenza di un elemento B che la f associa a ogni elemento di A ma anche la sua **unicità**. In altre parole non esiste un elemento di A al quale corrispondono due o più elementi distinti di B. L'elemento $b = f(a)$ è detto immagine di a tramite la funzione f; nello stesso tempo a rappresenta la contoimmagine di b tramite la stessa funzione. L'insieme A è detto *Dominio*. Qualora tutti gli elementi dell'insieme B sono immagine degli elementi del dominio A, allora B si dice *Codominio* di f; parliamo di **funzioni reali** poichè, come già detto, il Dominio e il Codominio sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Osservazione

Durante il corso di Analisi considereremo solo funzioni **suriettive**, ovvero funzioni dove l'insieme B rappresenta sempre il codominio di f.

2.1.1 *Funzione iniettiva e funzione inversa*

Sia $f : D \to C$. Allora f è *iniettiva* se

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Una funzione iniettiva ci permette di "leggere" la funzione dal Codominio al Dominio cambiando il senso di percorrenza. Parliamo dunque di *funzione inversa*, e possiamo affermare che **una funzione è invertibile quando è iniettiva**.

Dal punto di vista geometrico, f è iniettiva quando tracciando una retta parallela all'asse x, questa interseca il grafico della funzione **al più** (massimo) una volta. Ovviamente è possibile rendere una funzione iniettiva limitando (ovvero "considerandone" una parte) il dominio come vedremo in seguito.

2.1.2 *Monotònia di una funzione*

Sia $f : D \to C$.

Definizione

f si dice *strettamente crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ovvero si mantiene la relazione d'ordine tra immagini e controimmagini di f.

Definizione

f si dice *debolmente crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione

f si dice *debolmente decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definizione

f si dice *strettamente decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Queste 4 categorie di funzioni sono dette **monotòne**.

Teorema

[1]

Sia $f : D \to C$ strettamente monotòna. Allora f è iniettiva e dunque invertibile.

Tesi

f è iniettiva, ovvero:

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ipotesi

$f \uparrow$ (strettamente crescente) ovvero:

$$\forall x_1, x_2 \in D \quad con \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Dall'ipotesi che $f(x_1) < f(x_2)$ segue $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dunque diremo che la stetta monotònia è *condizione sufficiente* a garantire l'invertibilità di f. Tuttavia è utile osservare che la stretta monotonia non è anche *condizione necessaria* dell'invertibilità, in quanto, esistono funzioni non strettamente monotone ma invertibili.

2.1.3 *Funzioni pari e funzioni dispari*

Definizione

Sia $f : D \to C$. D è simmetrico rispetto l'origine, ovvero $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Definizione

Sia $f : D \to C$. Allora f si dice pari se:

$$\forall x \in D \quad si \quad ha \quad f(-x) = f(x).$$

Ovvero il grafico è simmetrico rispetto y.

[1] La dimostrazione che segue prende in esame la monotònia strettamente crescente, tuttavia il teorema è dimostrabile anche prendendo come ipotesi una funzione strettamente decrescente

Definizione

Sia $f : D \to C$. Allora f si dice dispari se:

$$\forall x \in D \quad si \quad ha \quad f(-x) = -f(x).$$

Ovvero il grafico è simmetrico rispetto l'origine degli assi.

2.2 Le funzioni elementari

In questo capitolo introduciamo le funzioni reali elementari, descrivendone le proprietà e disegnandone il grafico. Iniziamo estendendo le definizioni, già incontrate precedentemente (1.4.1, 1.4.2, 1.4.3), di maggiorante/minorante alle funzioni reali.

2.2.1 *Maggiorante e minorante di una funzione reale*

Sia $f : D \to C$
$x \mapsto y = f(x)$

Definizione

$M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di f se è un maggiorante di C, ovvero:

$$\forall y \in C \Rightarrow \quad y \leq M$$

quindi

$$\forall x \in D \Rightarrow \quad f(x) \leq M$$

Se f ammette maggiorante allora questi sono infiniti.

Definizione

f si dice limitata superiormente se ammette un maggiorante.

Definizione

$m \in \mathbb{R}$ si dice minorante di f se è un minorante di C, ovvero:

$$\forall y \in C \Rightarrow \quad y \geq m$$

quindi

$$\forall x \in D \Rightarrow \quad f(x) \geq m$$

Se f ammette minorante allora questi sono infiniti.

Definizione

f si dice limitata inferiormente se ammette un minorante.

2.2.2 *Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione reale*

Definizione

$M \in \mathbb{R}$ si dice massimo assoluto di f se:

$$\begin{cases} M \geq f(x) \quad \forall x \in D \\ \exists x_M \in D / f(x_M) = M \end{cases}$$

E' utile osservare che x_M, ovvero punto di massimo assoluto, può non essere unico, mentre M, *massimo*, se esiste, è **unico**. Ad esempio la funzione $sin(x)$ ha $x_M = \{\pi/2, 5\pi/2, \dots\}$ e $M = 1$.

Definizione

$m \in \mathbb{R}$ si dice minimo assoluto di f se:

$$\begin{cases} m \leq f(x) \quad \forall x \in D \\ \exists x_m \in D / f(x_m) = m \end{cases}$$

Ovviamente possiamo ripetere (per il minimo assoluto) l'osservazione fatta per il massimo assoluto di una funzione reale.

Definizione

f è limitata superiormente se C è limitata superiormente.

Per l'assioma di completezza(1.5.1) sappiamo che esiste sempre l'estremo superiore, dunque passiamo ad estendere la sua definizione alle funzioni reali.

Definizione

$\Lambda \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di f se:

$$\begin{cases} f(x) \leq \Lambda \quad \forall x \in D \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \overline{x} \in D \quad / \quad f(\overline{x}) > \Lambda - \epsilon \end{cases}$$

Definizione

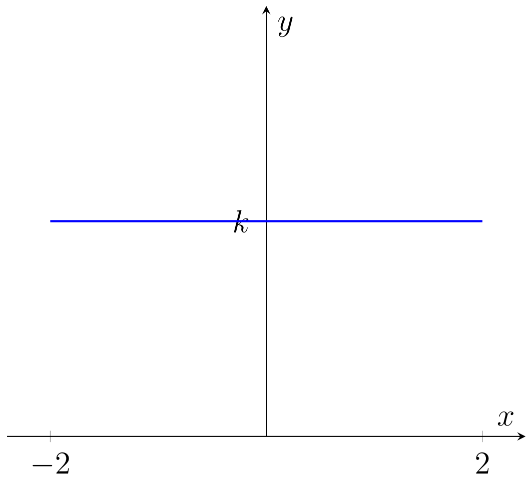
$\lambda \in \mathbb{R}$ si dice estremo inferiore di f se:

$$\begin{cases} f(x) \geq \lambda \quad \forall x \in D \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \overline{x} \in D \quad / \quad f(\overline{x}) < \lambda + \epsilon \end{cases}$$

2.2.3 *Grafici e proprietà delle funzioni elementari*

Funzione costante

$k \in \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \to \{k\}$
$x \mapsto y = f(x) = k$

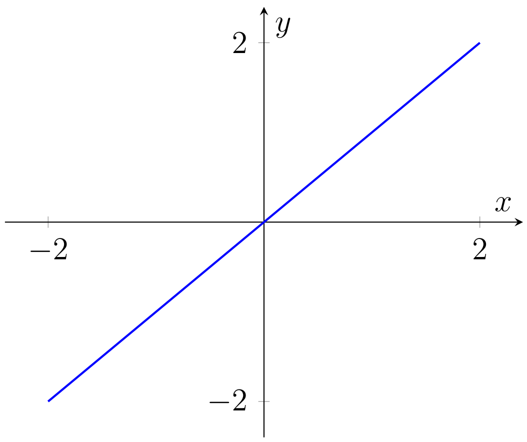


Proprietà

$min = max = k$. f non invertibile (neanche limitando il dominio di f). f debolmente crescente e debolmente decrescente.

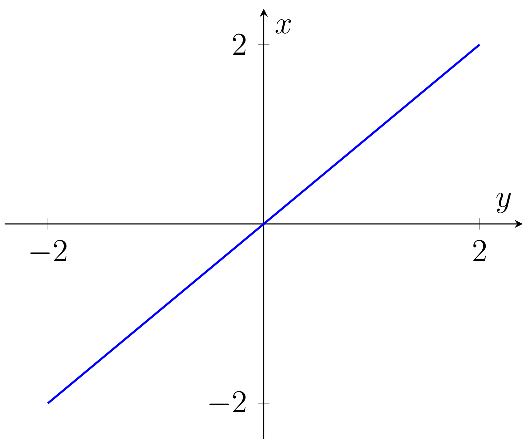
Funzione bisettrice

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = x$



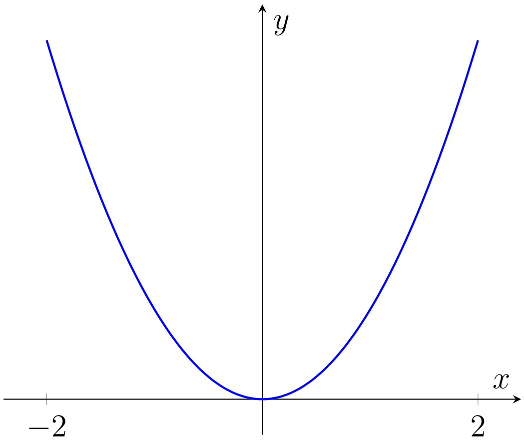
Proprietà

f dispari e invertibile. risulta quindi: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = y$



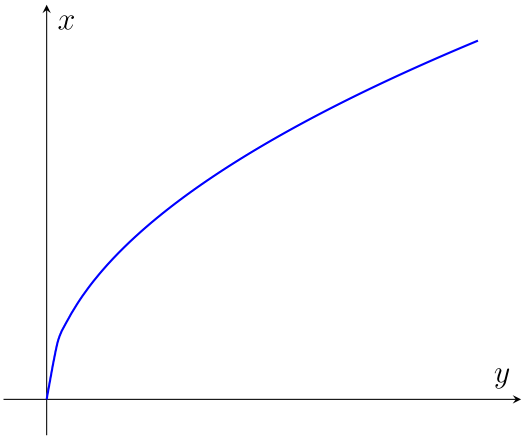
Funzione x^2

$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^2$



Proprietà

$minf = 0$. f funzione pari, non invertibile nella totalità del suo dominio. Restringendo $D \in [0, +\infty)$ si definisce la sua funzione inversa: $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

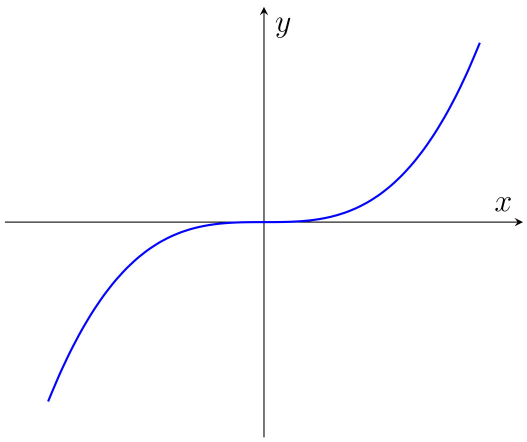


Proprietà

f strettamente crescente.

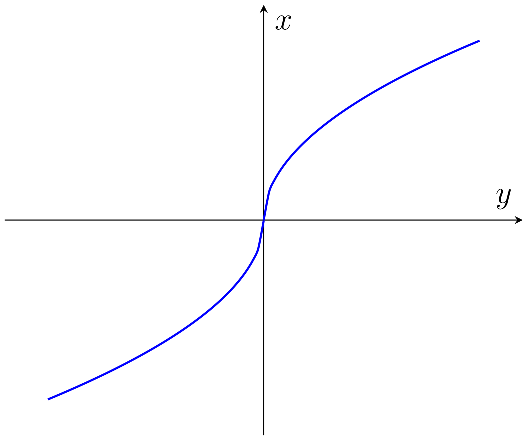
Funzione x^3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = x^3$



Proprietà

$\nexists \inf f, \nexists \sup f$. f dispari, strettamente crescente e iniettiva in tutto il suo dominio. Si definisce la sua funzione inversa: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

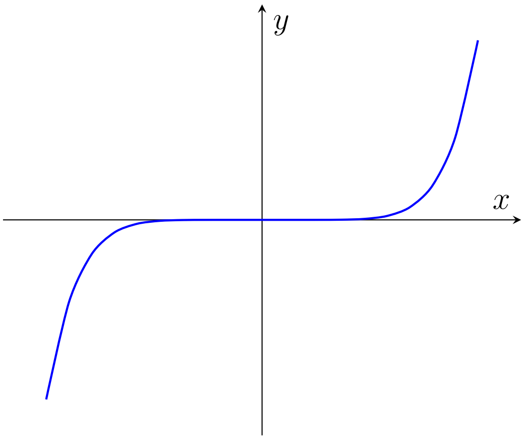


Proprietà

f strettamente crescente.

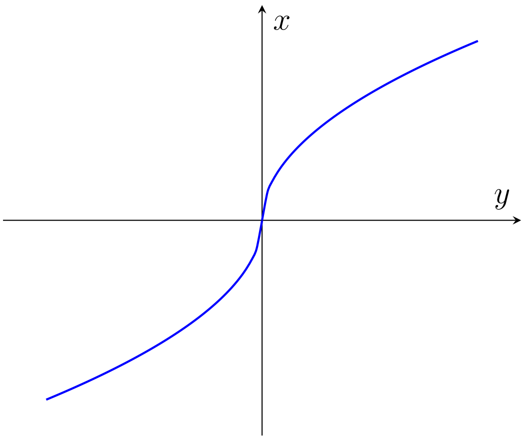
Funzione potenza con esponente naturale dispari

Sia $n \in \mathbb{N}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = x^{2n-1}$



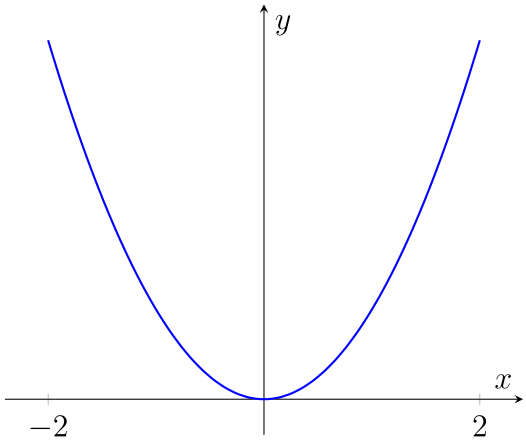
Proprietà

f strettamente crescente, dispari e illimitata superiormente e inferiormente.
Si ha, inoltre, che $x > x^3 > x^5 > ... \quad \forall x \in (0,1)$ e $x < x^3 < x^5 < ... \quad \forall x > 1$
f risulta invertibile in tutto il Domininio e si ha: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt[2n-1]{y}$



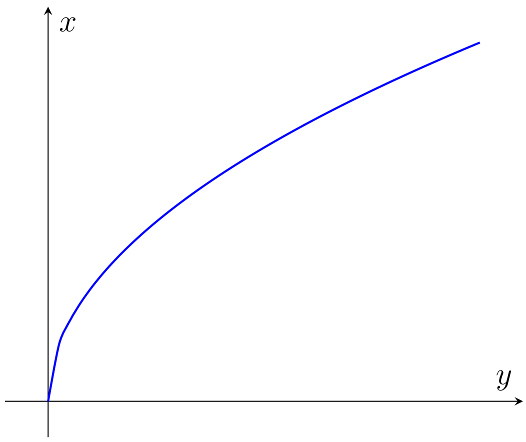
Funzione potenza con esponente naturale pari

Sia $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^{2n}$



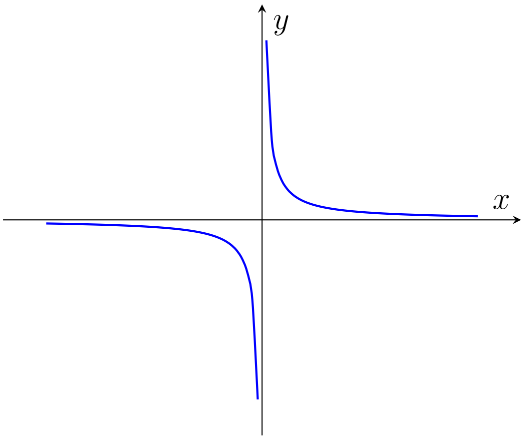
Proprietà

Si ha $x > x^2 > x^3 > x^4 ...\quad \forall x \in (0,1)$ e $x < x^2 < x^3 < x^4 ...\quad \forall x > 1$ f funzione pari, non invertibile nella totalità del suo dominio. Restringendo $D \in [0, +\infty)$ si definisce la sua funzione inversa: $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt[2n]{y}$



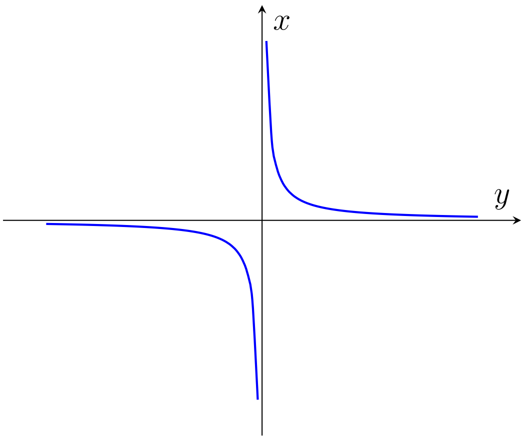
Funzione $1/x$

$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \mapsto y = f(x) = x^{-1} = 1/x$



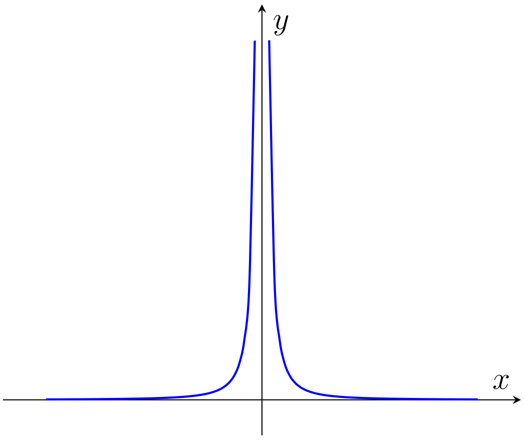
Proprietà

f illimitata superiormente e inferiormente. f non strettamente monotona, ma invertibile. Si ha: $f^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = y^{-1} = 1/y$



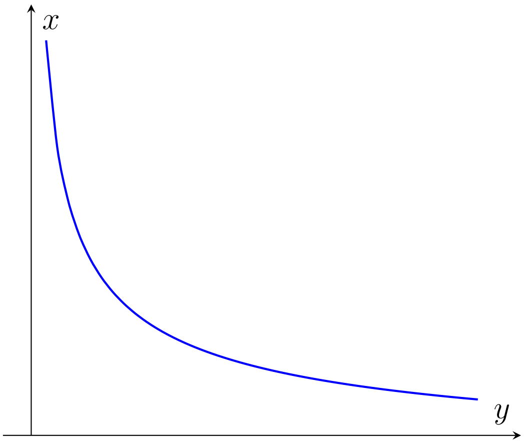
Funzione $1/x^2$

$f : \mathbb{R} - \{0\} \to (0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^{-2} = 1/x^2$



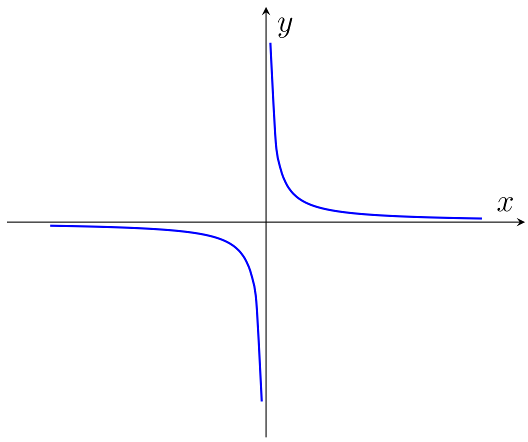
Proprietà

Estr. Inferiore di $f = 0$. f risulta invertibile se ristretta in $(0, +\infty)$. Si ha:
$f^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = 1/\sqrt{y}$



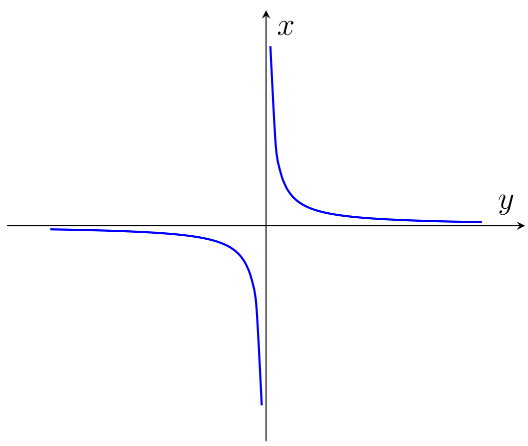
Funzione potenza con esponente naturale negativo dispari

Sia$n \in \mathbb{N}$. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$x \mapsto y = f(x) = x^{-(2n-1)}$



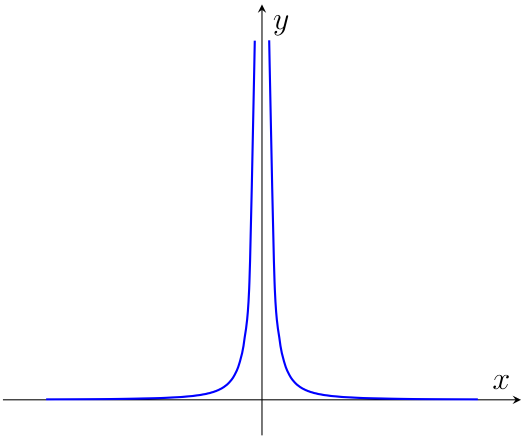
Proprietà

f dispari e invertibile in tutto il Dominio. Si ha: $f^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = 1/\sqrt[2n-1]{y}$



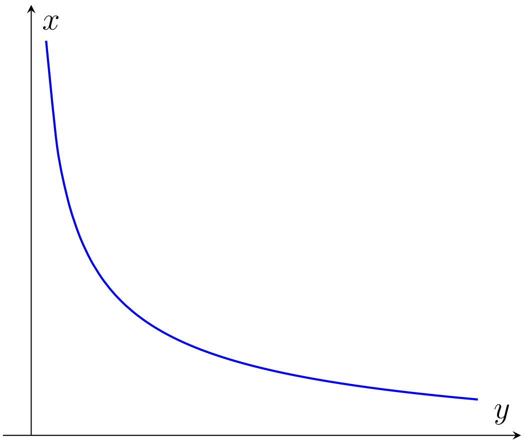
Funzione potenza con esponente naturale negativo pari

$f : \mathbb{R} - \{0\} \to (0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^{-2n}$



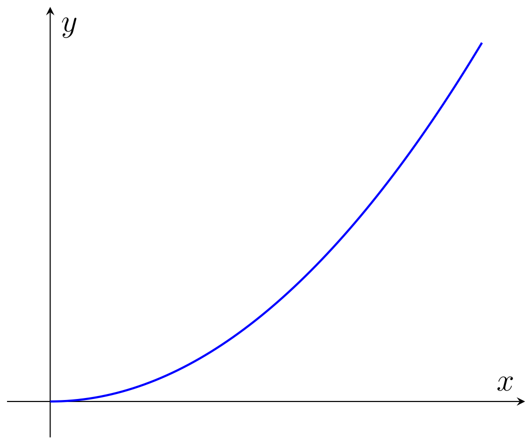
Proprietà

f invertibile solo se ristretta in $(0, +\infty)$. Si ha: $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = 1/\sqrt[2n]{y}$

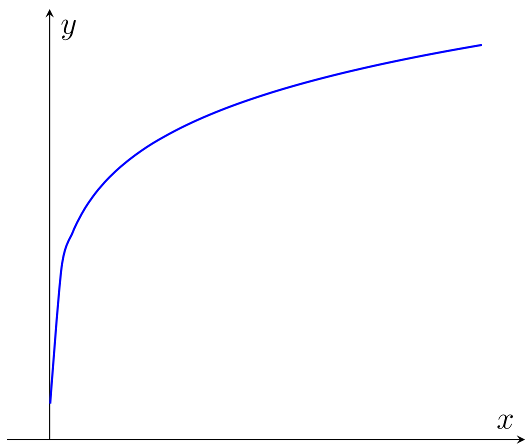


Funzione potenza con esponente razionale positivo non naturale

Sia $r \in \mathbb{Q}^+ - \mathbb{N}$. $r = n/m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ e $m \neq 1$. $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^r = x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n}$.
Si noti che il passaggio $= \sqrt[m]{x^n}$ è lecito solo se $x \geq 0$



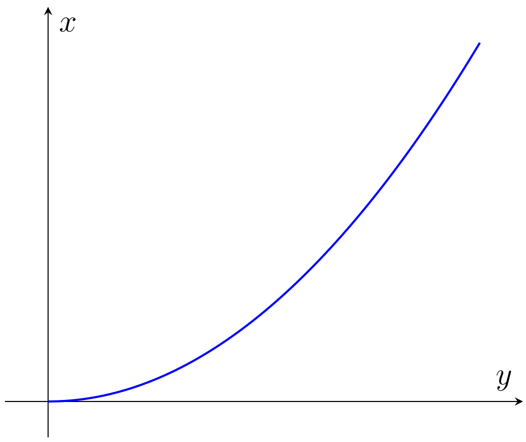
(con r $>$ 1)



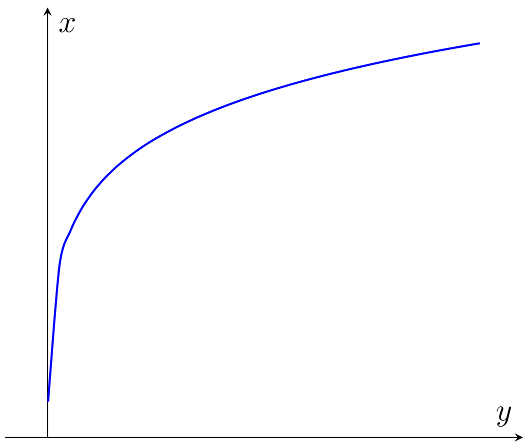
(con 0 $<$ r $<$ 1)

Proprietà

f strettamente crescente(in entrambi i casi), illimitata superiormente, limititata inferiormente (min $f = 0$). f invertibile in D. Si ha: $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $y \mapsto x = f^{-1}(y) = y^{1/r} = y^{m/n}$



(con $0 < \text{r} < 1$)



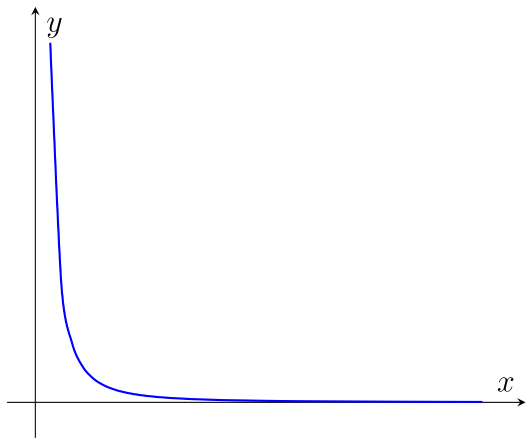
(con $\text{r} > 1$)

Proprietà

f ne pari ne dispari.

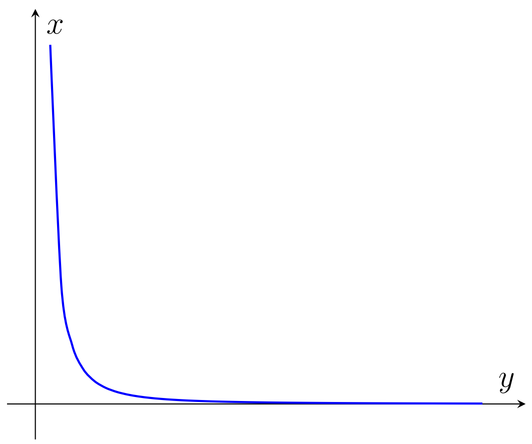
Funzione potenza con esponente razionale negativo non intero

Sia $r \in \mathbb{Q}^- - \mathbb{Z}$. $r = -(n/m)$ con $n, m \in \mathbb{N}$ e $m \neq 1$. $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^r = 1/x^{n/m} = 1/\sqrt[m]{x^n}$.



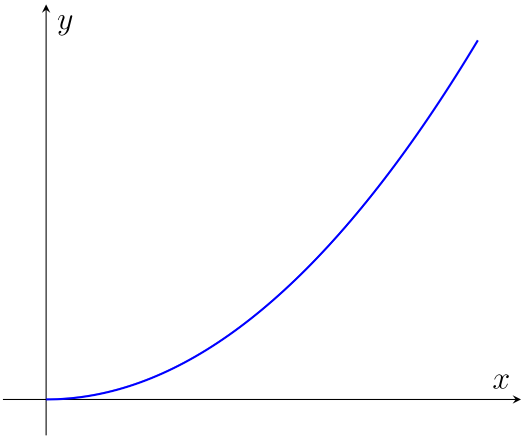
Proprietà

Estr. Inferiore di $f = 0$. f strettamente decrescente. f invertibile in D. Si ha: $f^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ $y \mapsto x = f^{-1}(y) = y^{1/r}$

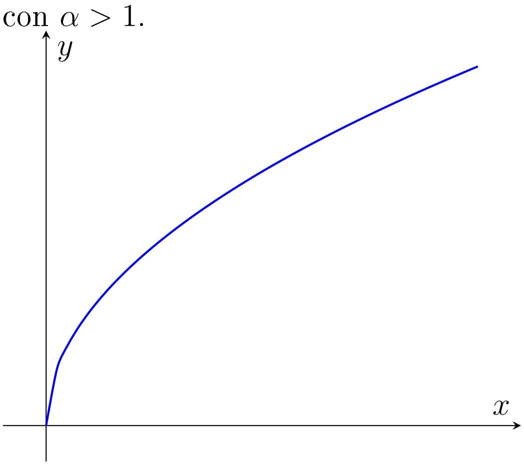


Funzione potenza con esponente irrazionale positivo

Sia $\alpha \in \mathbb{I}^+$ (ad esempio $\alpha = \pi$); $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^\alpha$.



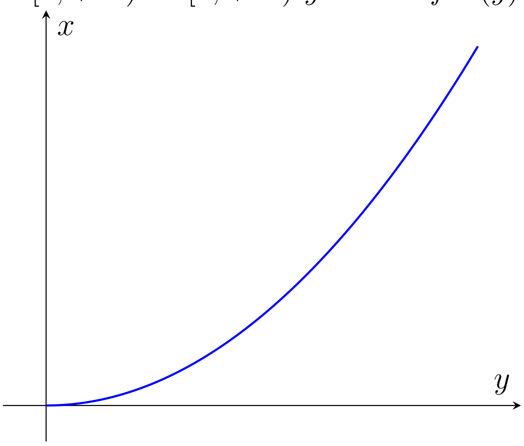
con $\alpha > 1$.



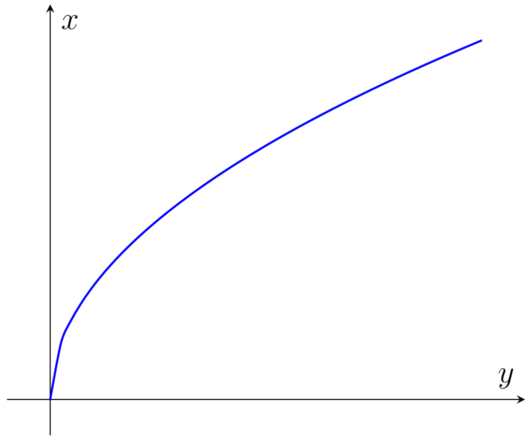
con $0 < \alpha < 1$.

Proprietà

f strettamente crescente e invertibile. Si ha
$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $y \mapsto x = f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$



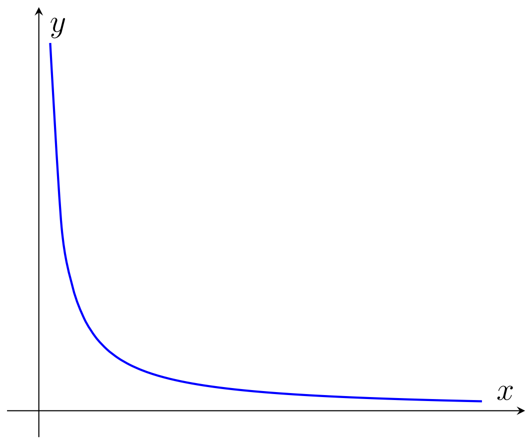
con $0 < \alpha < 1$.



con $\alpha > 1$.

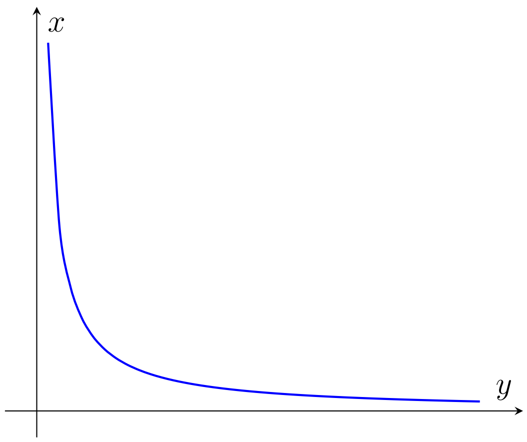
Funzione potenza con esponente irrazionale negativo

Sia $\alpha \in \mathbb{I}^-$ $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = x^\alpha = 1/x^{-\alpha}$.
(si ricordi che α è negativo)



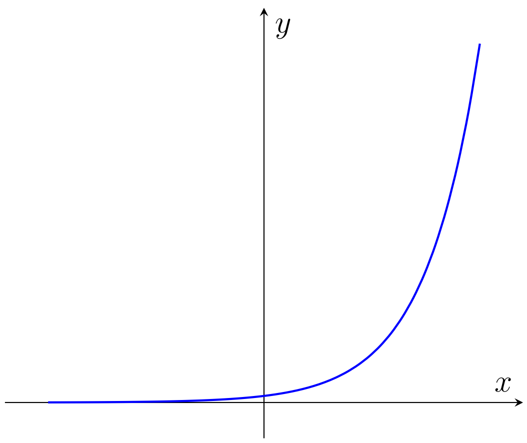
Proprietà

f strettamente decrescente e invertibile. Si ha: $f^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$.

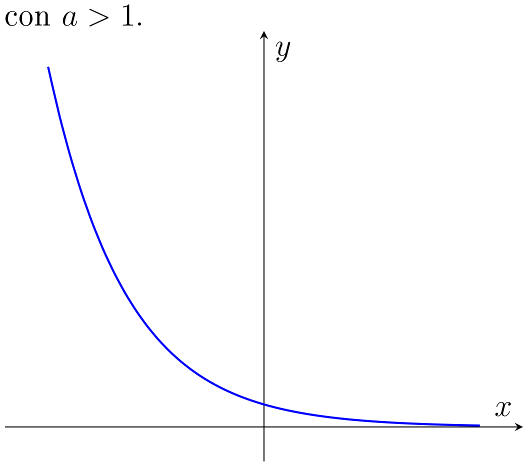


Funzione esponenziale

Sia $a > 0$ e $a \neq 1$. $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = a^x$.



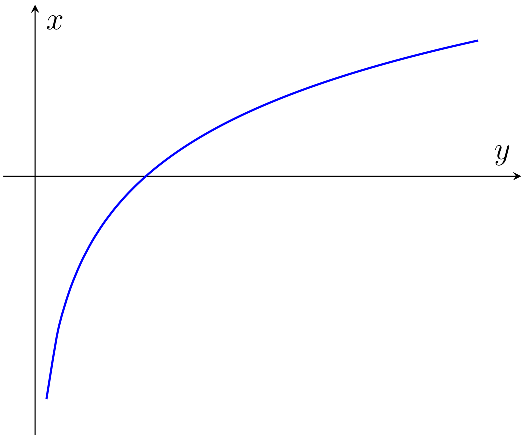
con $a > 1$.



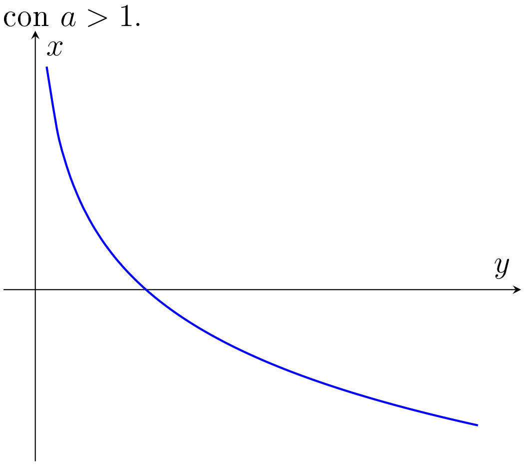
con $0 < a < 1$

Proprietà

f illimitata superiormente. Limitata inferiormente ed estr. inferiore $f = 0$. Con $0 < a < 1$ f strettamente decrescente. Con $a > 1$ f strettamente crescente. Invertibile. Si ha: $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \log_a x$.



con $a > 1$.

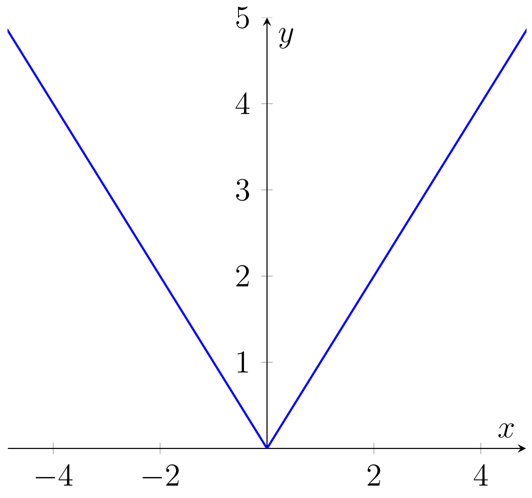


con $0 < a < 1$

Funzione $|x|$ ***(modulo di*** x***)***

$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = f(x) = |x|$
con

$$|x| = \begin{cases} x \quad per \quad x \geq 0 \\ -x \quad per \quad x < 0 \end{cases}$$



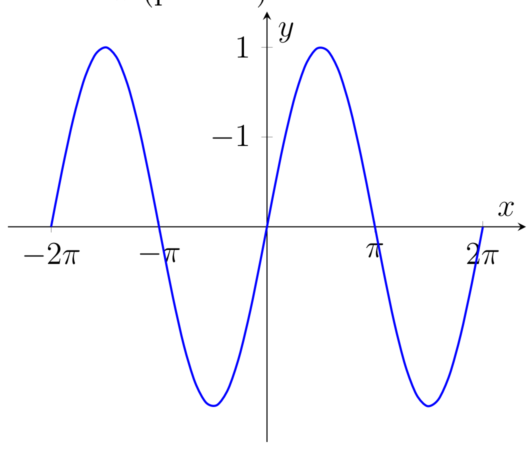
Proprietà

Min. assoluto di $f = 0$. Pari.

2.2.4 *Grafici e proprietà delle funzioni trigonometriche*

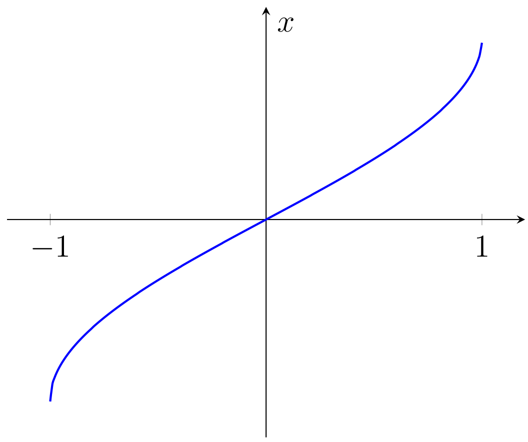
Funzione $\sin x$

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ $x \mapsto y = f(x) = \sin(x) = \sin(x + T)$
dove $T = 2\pi$ (periodo).



Proprietà

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. f non invertibile in tutto D. Tuttavia si definisce $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \arcsin y$

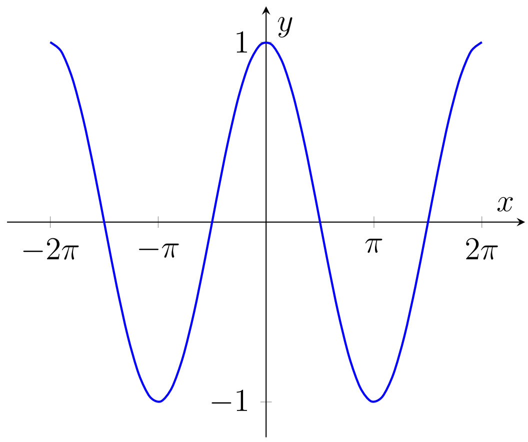


Proprietà

f strettamente crescente. $\arcsin -y = -\arcsin y$.

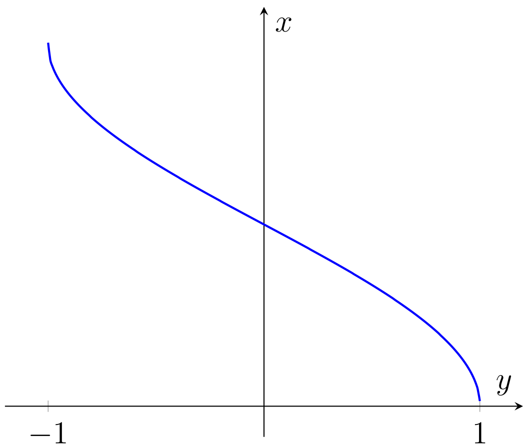
Funzione $\cos x$

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ $x \mapsto y = f(x) = \cos(x) = \cos(x + T)$
dove $T = 2\pi$ (periodo).



Proprietà

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. f <u>non invertibile in tutto D</u>. Tuttavia si definisce $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \arccos y$

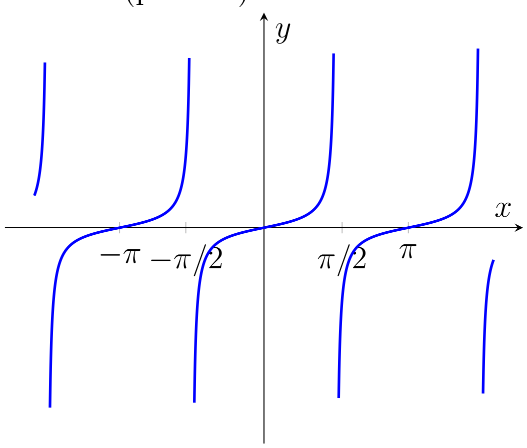


Proprietà

f strettamente decrescente. Ne pari ne dispari. $\arccos 0 = \pi/2$.

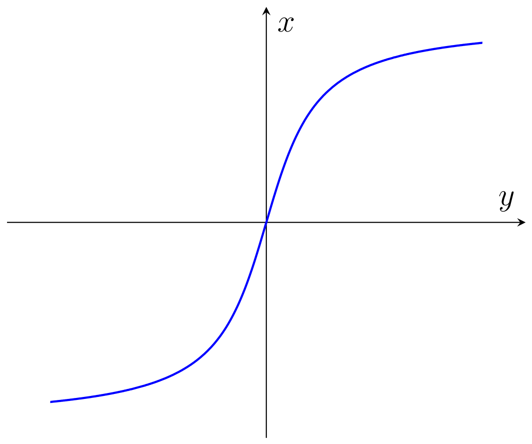
Funzione $\tan x$

$f : D \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = \tan(x) = \sin x / \cos x = \tan(x + T) \quad \forall x \in D$
$D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = \pi/2 + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$
dove $T = \pi$ (periodo).



Proprietà

f illimitata, dispari. $\tan x$ non iniettiva in D. Restringendo il dominio si ha:
$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \arctan y$

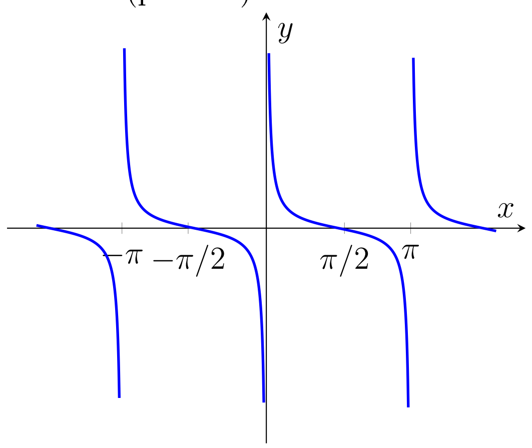


Proprietà

f strettamente crescente.

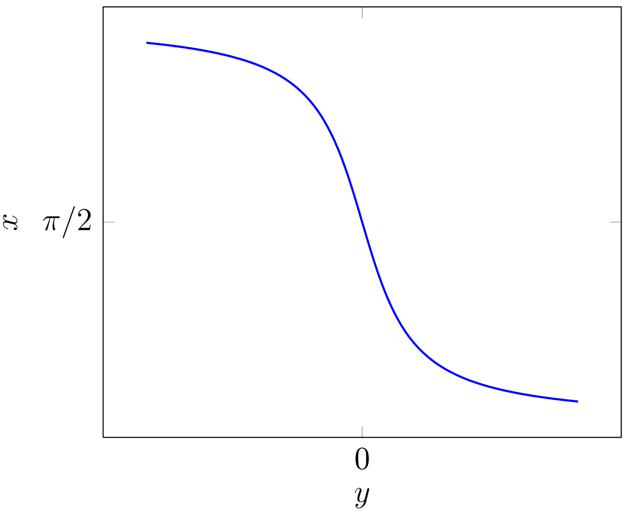
Funzione $\cot x$

$f : D \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = \cot(x) = 1/\tan x = \cot(x+T) \quad \forall x \in D$
$D = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \ / \ x = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$
dove $T = \pi$ (periodo).



Proprietà

f strettamente decrescente (nei singoli intervalli). Si definisce la sua funzione inversa: $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$
$y \mapsto x = f^{-1}(y) = arccot(y)$



Proprietà

f strettamente decrescente. Ne pari ne dispari.

2.2.5 *Funzioni non elementari*

Funzione combinazione lineare

Siano $f(x), g(x)$ funzioni reali e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Allora $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ è *funzione conbinazione lineare* e risulta:

$$D_F = D_f \cap D_g$$

Funzione prodotto

Siano $f(x), g(x)$ funzioni reali. Allora $F(x) = f(x) * g(x)$ è funzione prodotto e risulta:

$$D_F = D_f \cap D_g$$

Funzione rapporto

Siano $f(x), g(x)$ funzioni reali. Allora $F(x) = f(x)/g(x)$ è funzione rapporto e risulta:

$$D_F = (D_f \cap D_g) - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$

Funzione $f(x)^{g(x)}$

Con $f(x), g(x)$ funzioni reali e $F(x) = f(x)^{g(x)}$, si ha:

$$D_F = (D_f \cap D_g) \cap \{x \in D_f / f(x) > 0\}$$

Funzione composta $f[g(x)]$

Siano $f(x), g(x)$ funzioni reali. Allora $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ è *funzione composta* e si ha:

$$D_{(f \circ g)(x)} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$$

Capitolo 3

Limite di una funzione reale

In questo capitolo introduciamo il concetto di **limite** di una funzione reale di variabile reale, concetto fondamentale in tutta l'Analisi matematica.

3.1 Studio del $\lim_{x \to x_0}$ di $f(x)$

Sia $f : D_f \to C_f$
$x \mapsto y = f(x)$ e $x_0 \in \text{Đ}_{D_f}$ ovvero x_0 punto di accumulazione del dominio di f. Allora la scrittura $\lim_{x \to x_0} f(x)$ equivale a studiare il comportamento della funzione nell'intorno bucato di x_0(è utile notare che può verificarsi che $x_0 \notin D_f$). Possiamo avere 3 casi:

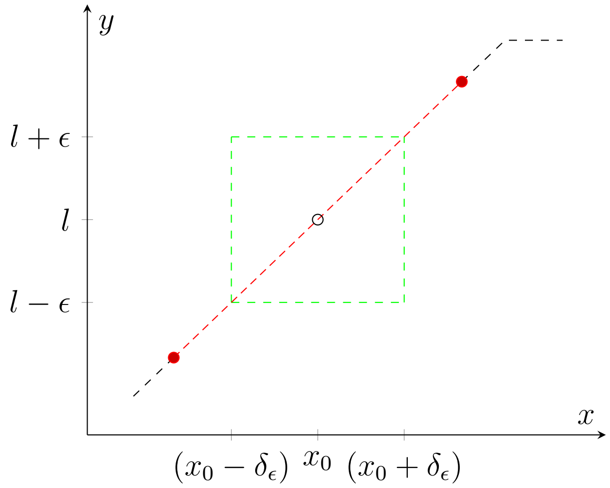
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ovvero f(x) converge ad l per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ovvero f(x) diverge a $\pm\infty$ per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \nexists$ ovvero f(x) è irregolare per $x \to x_0$

Passiamo ora ad analizzare caso per caso.

3.1.1 $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$



Fissato un ϵ piccolo a piacere, si determinano due intorni $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ e il suo corrispondente $(x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon)$. Il loro prodotto cartesiano forma, nel piano euclideo, un rettangolo (evidenziato in verde nel grafico sopra) all'interno del quale ci sarà sempre, sia a destra cha a sinistra del punto di coordinate (x_0, l), un pezzo di grafico.

Definizione di convergenza

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in I_{\delta_\epsilon}(x_0) - \{x_0\} si \quad ha \quad f(x) \in (l-\epsilon, l+\epsilon)\,.$

Definizione di convergenza da destra/sinistra

- Funzione convergente da destra, ovvero $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se:

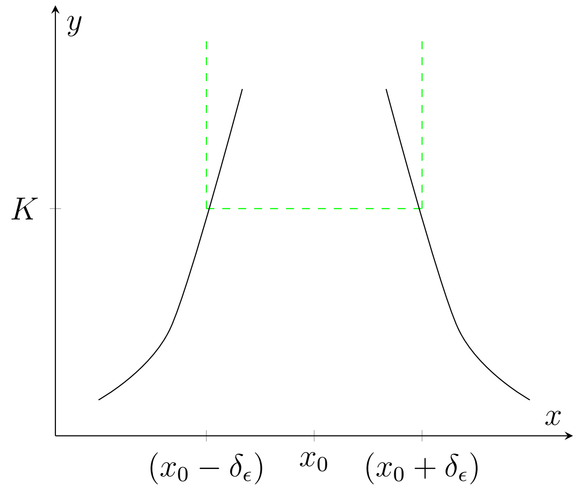
  $$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in (x_0, \delta_\epsilon + x_0) \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

- Funzione convergente da sinistra, ovvero $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se:

  $$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0) \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

3.1.2 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$



Fissato un numero K » (molto grande) risulta che la funzione è sempre all'interno dello spazio (tratteggiato in verde nel disegno) in corrispondenza dell'intorno bucato di x_0.

Definizione di divergenza a $+\infty$

$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in I_{\delta_K}(x_0) - \{x_0\} si \quad ha \quad f(x) > K.$

Definizione di divergenza a $+\infty$ ***da destra/sinistra***

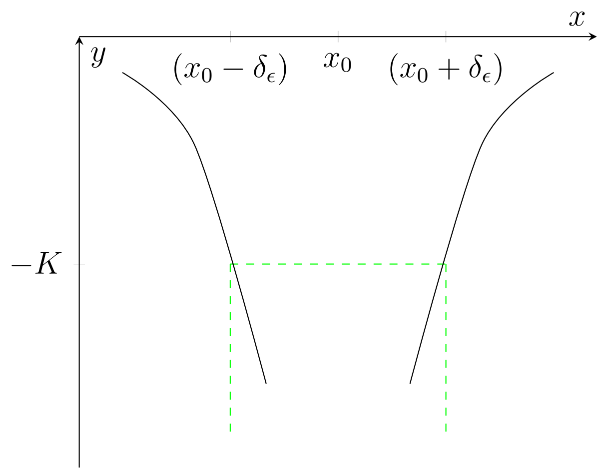
- Funzione divergente da destra, ovvero $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ se:

  $\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in (x_0, x_0 + \delta_K) si \quad ha \quad f(x) > K.$

- Funzione convergente da sinistra, ovvero $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ se:

  $\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in (x_0 - \delta_K, x_0) si \quad ha \quad f(x) > K.$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$



Definizione di divergenza a $-\infty$

$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in I_{\delta_K}(x_0) - \{x_0\} si \quad ha \quad f(x) < -K.$

Definizione di divergenza a $-\infty$ ***da destra/sinistra***

- Funzione divergente da destra, ovvero $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ se:

  $$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in (x_0, x_0 + \delta_K) si \quad ha \quad f(x) < -K.$$

- Funzione convergente da sinistra, ovvero $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ se:

  $$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x \in (x_0 - \delta_K, x_0) si \quad ha \quad f(x) < -K.$$

3.1.3 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \nexists$

Diremo che non esiste il limite di una funzione reale, per x che tende a x_0, se questa non converge ne diverge. Una tecnica per verificare l'irregolarità, per $x \to x_0$, di f consiste nel mostrare che in ogni intorno bucato di x_0 esistono due punti in cui f coincide rispettivamente con due ulteriori funzioni g e h che si comportano diversamente per $x \to x_0$. Ad esempio studiamo il $\lim_{x\to x_0^+} \sin \frac{1}{x} = \nexists$.
Occorre dimostrare che f non converge ne diverge, ovvero:

$$\forall \delta > 0 \exists x^I, x^{II} \in (0, \delta) / f(x^I) = 1, f(x^{II}) = -1.$$

osserviamo che:

- $\sin\frac{1}{x} = 1 \rightleftarrows \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\frac{1}{x} = -1 \rightleftarrows \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2h\pi \quad \forall h \in \mathbb{Z}$

Analizzando la prima espressione si ha che f(x) $= 1$ quando $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Deve verificarsi, dunque, che $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} < \delta$. Segue $\frac{\pi}{2} + 2k\pi > \frac{1}{\delta} \Rightarrow k > \underbrace{\frac{1}{2\pi\delta} - \frac{1}{4}}_{numero\ reale\ molto\ grande}$. Mi basta prendere $k = \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi\delta} - \frac{1}{4}\right]}_{funzione\ parte\ intera} +1$.
Analogamente si dimostra l'esistenza del secondo punto.

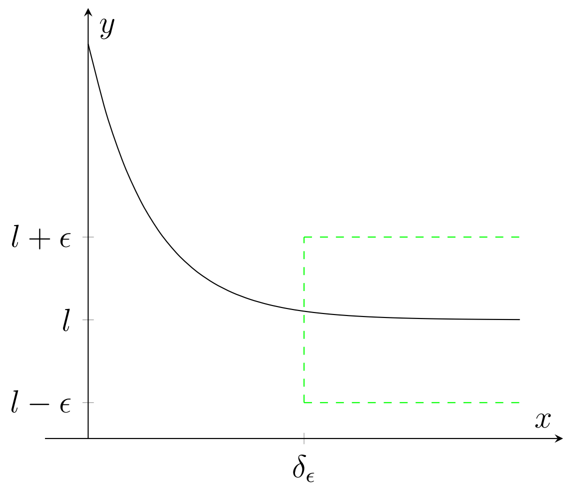
3.2 Studio del $\lim_{x\to+\infty}$ di $f(x)$

Sia $f : D_f \to C_f$
$x \mapsto y = f(x)$.
Allora la scrittura $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ equivale a studiare il comportamento della funzione al crescere di x. Si noti che questo studio ha senso quando D_f è illimitato superiormente. Possiamo avere 3 casi:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ovvero f(x) converge ad l
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ovvero f(x) diverge a $\pm\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \nexists$ ovvero f(x) è irregolare

Passiamo ora ad analizzare caso per caso.

3.2.1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

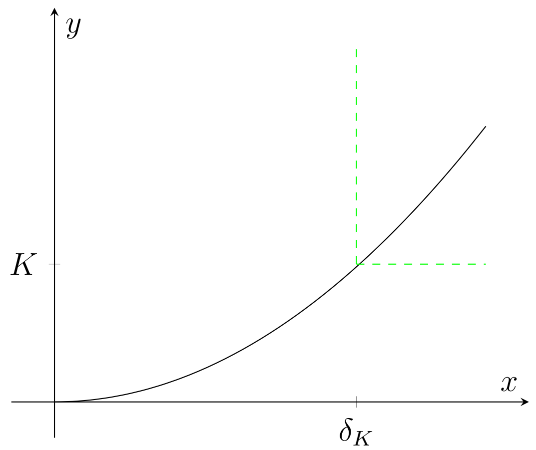


Definizione di convergenza

$$\forall\epsilon > 0\exists\delta_\epsilon > 0/\forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x > \delta_\epsilon si \quad ha \quad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

e diremo che: la funzione tende a l **dall'alto**, e lo indicheremo con il simbolo l^+, quando la funzione (da un certo δ_ϵ in poi) si troverà sempre nell'intorno $(l, l+\epsilon)$ (si veda il grafico sopra); la funzione tende a l **dal basso**, e lo indicheremo con il simbolo l^-, quando la funzione (da un certo δ_ϵ in poi) si troverà sempre nell'intorno $(l-\epsilon, l)$.

3.2.2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

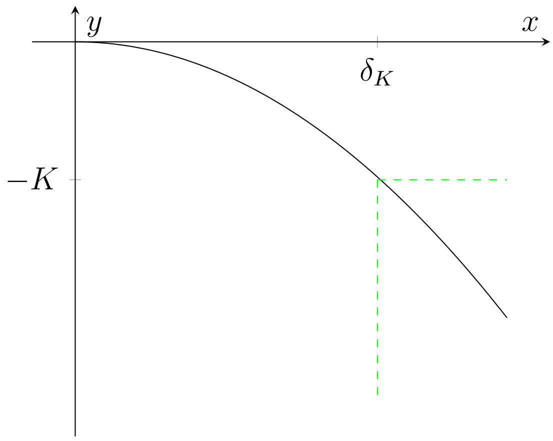


Fissato un numero K » (molto grande) risulta che, dopo un certo δ_K, la funzione è sempre all'interno dello spazio tratteggiato in verde nel grafico.

Definizione di divergenza a $+\infty$

$$\forall K > 0\exists\delta_K > 0/\forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x > \delta_K si \quad ha \quad f(x) > K.$$

3.2.3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



Definizione di divergenza a $-\infty$

$$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x > \delta_K si \quad ha \quad f(x) < -K.$$

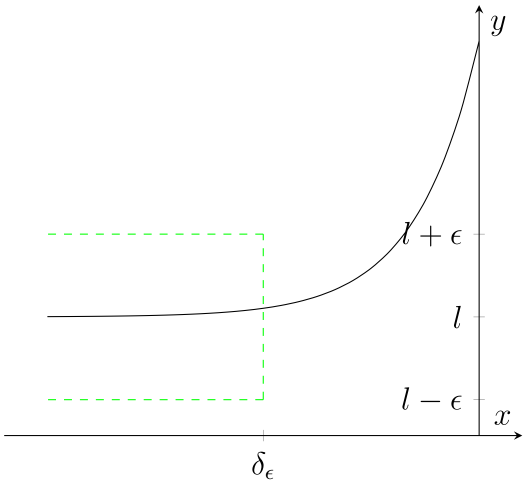
3.3 Studio del $\lim_{x\to-\infty}$ di $f(x)$

Sia $f : D_f \to C_f$
$x \mapsto y = f(x)$.
Allora la scrittura $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ equivale a studiare il comportamento della funzione al decrescere di x. Si noti che questo studio ha senso quando D_f è illimitato inferiormente. Possiamo avere 3 casi:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ovvero f(x) converge ad l
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ ovvero f(x) diverge a $\pm\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \nexists$ ovvero f(x) è irregolare

Passiamo ora ad analizzare caso per caso.

3.3.1 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

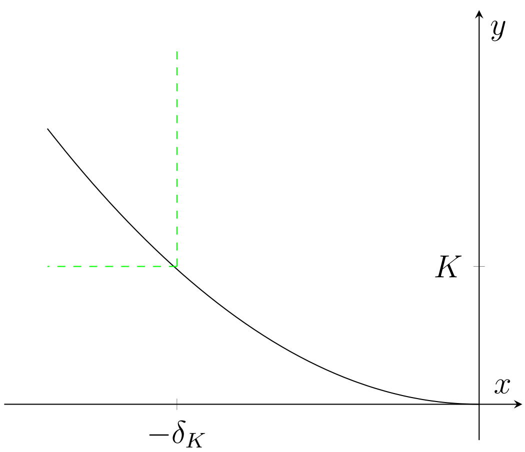


Definizione di convergenza

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x < -\delta_\epsilon si \quad ha \quad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon.$$

e diremo che: la funzione tende a l **dall'alto**, e lo indicheremo con il simbolo l^+, quando la funzione (da un certo δ_ϵ in poi) si troverà sempre nell'intorno $(l, l+\epsilon)$ (si veda il grafico sopra); la funzione tende a l **dal basso**, e lo indicheremo con il simbolo l^-, quando la funzione (da un certo δ_ϵ in poi) si troverà sempre nell'intorno $(l-\epsilon, l)$.

3.3.2 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Fissato un numero K » (molto grande) risulta che, dopo un certo δ_K, la funzione è sempre all'interno dello spazio tratteggiato in verde nel grafico.

Definizione di divergenza a $+\infty$

$$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x > \delta_K si \quad ha \quad f(x) > K.$$

3.3.3 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Definizione di divergenza a $-\infty$

$$\forall K > 0 \exists \delta_K > 0 / \forall x \in D_f \quad per \quad cui \quad x < -\delta_K si \quad ha \quad f(x) < -K.$$

3.4 *Teoremi sul calcolo del limite*

$$Sia \quad \lambda = \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \pm\infty \end{cases}$$

Allora la scrittura $\lim_{x \to \lambda} f(x) = \Lambda$ equivale a studiare la funzione nell'intorno di λ ovvero:

$$I_\delta(\lambda) = \begin{cases} se \quad \lambda = x_0 \in \mathbb{R} \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ se \quad \lambda = +\infty \equiv (\delta, +\infty) \\ se \quad \lambda = -\infty \equiv (-\infty, -\delta) \end{cases}$$

3.4.1 *Teorema di unicità del limite*

Sia f regolare per $x \to \lambda$ e $\Lambda = \lim_{x \to \lambda} f(x)$. Allora Λ è **unico**.

3.4.2 *Teorema del confronto*

Siano f, g, h funzioni definite per $I_\delta(\lambda) - \{\lambda\}$ e sia $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I_\delta(\lambda) - \{\lambda\}$. Allora:

- Se $\lim_{x \to \lambda} g(x) = \lim_{x \to \lambda} h(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{x \to \lambda} f(x) = l$.
- Se $\lim_{x \to \lambda} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to \lambda} f(x) = +\infty$.
- Se $\lim_{x \to \lambda} h(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to \lambda} f(x) = -\infty$.

3.4.3 *Tecnica del cambio di variabile*

Tra le tecniche utilizzate per il calcolo di un limite c'è *la tecnica cambio di variabile*; questa consiste nell'introdurre una nuova variabile, esprimendo la vecchia in funzione di quest'ultima, accertandosi che questa <u>sia invertibile</u>:
$x = \phi(t)$
$t = \phi^{-1}(x)$

Esempio

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.
Impostiamo $x = \phi(t) = \frac{1}{t}$ e $t = \phi^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ Ora $\lim_{x\to+\infty} \phi^{-1}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$.
Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to0^+} \quad t * \sin\frac{1}{t} = 0$.

3.4.4 *Teorema del limite delle funzioni composte*

Sia $F(x) = g[f(x)]$.

Osservazioni

D_F è illimitato superiormente $\Rightarrow D_f$ è illimitato superiormente.
D_F è illimitato inferiormente $\Rightarrow D_f$ è illimitato inferiormente.

Teorema

Sia $t = f(x)$ regolare per $x \to \lambda$, $\Lambda = \lim_{x\to\lambda} f(x)$, $y = g(t)$ funzione elementare. Allora $\lim_{x\to\lambda} F(x) = \lim_{t\to\Lambda} g(t)$. Si noti che se y funzione non elementare non posso concludere niente.

3.4.5 *Teorema del limite della combinazione lineare di funzioni*

Siano f e g regolari per $x \to \lambda$, e siano $\Lambda_g = \lim_{x\to\lambda} g(x)$ e $\Lambda_f = \lim_{x\to\lambda} f(x)$. Siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Allora posto $\Lambda = \lim_{x\to\lambda} [c_1 f(x) + c_2 g(x)]$ si ha:

Λ	Λ_f	Λ_g	c_1	c_2
$c_1 * l + c_2 * m$	$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$	$\forall c_1$	$\forall c_2$
$+\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\forall c_1$	$\gtrless 0$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\gtrless 0$	$\lessgtr 0$
$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\forall c_1$	$\lessgtr 0$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lessgtr 0$	$\lessgtr 0$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\lessgtr 0$	$\gtrless 0$

Forma indeterminata $\infty - \infty$

$\Lambda_f = \Lambda_g = \pm\infty$ e $c_1 * c_2 < 0$(discordi). $\Lambda_f = \pm\infty$, $\Lambda_g = \mp\infty$ e $c_1 * c_2 > 0$(concordi). In questi casi il teorema non è applicabile.

3.4.6 *Teorema del limite della funzione prodotto*

Siano f e g regolari per $x \to \lambda$, e siano $\Lambda_g = \lim_{x\to\lambda} g(x)$ e $\Lambda_f = \lim_{x\to\lambda} f(x)$. Allora posto $\Lambda = \lim_{x\to\lambda}[f(x) * g(x)]$ si ha:

Λ	Λ_f	Λ_g
$l * m$	$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\gtrless 0$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\lessgtr 0$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$

Forma indeterminata $0 * \infty$

$\Lambda_f = \pm\infty$ e $\Lambda_g = 0$. In questo caso il teorema non è applicabile.

3.4.7 *Teorema del limite della funzione rapporto*

Siano f e g regolari per $x \to \lambda$, e siano $\Lambda_g = \lim_{x\to\lambda} g(x)$ e $\Lambda_f = \lim_{x\to\lambda} f(x)$. Allora posto $\Lambda = \lim_{x\to\lambda}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ si ha:

Λ	Λ_f	Λ_g
$\frac{l}{m}$	$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R} - 0$
$+\infty$	$\pm\infty$	$\gtrless 0$
$+\infty$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$
$+\infty$	$\gtrless 0$	$0^{\pm}$
$-\infty$	$\pm\infty$	$\lessgtr 0$
$-\infty$	$\pm\infty$	$0^{\mp}$
$-\infty$	$\gtrless 0$	$0^{\mp}$

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$\Lambda_f = \Lambda_g = 0$. In questo caso il teorema non è applicabile.

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$\Lambda_f = \Lambda_g = \infty$. In questo caso il teorema non è applicabile.

3.4.8 *Teorema del limite della funzione* $[f(x)]^{g(x)}$

$\lim_{x\to\lambda}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to\lambda} e^{g(x)\ln[f(x)]}$.

Forme indeterminate

L'applicazione del teorema di cui sopra può portare alle seguenti forme indeterminate: $0 * \infty$ (all'esponente), ∞^0, 0^0 e 1^∞.

3.4.9 *Limiti notevoli*

Di seguito elemchiamo una serie di limiti notevoli introdotti, e calcolati, a lezione attraverso i quali possono essere derivati tutti gli altri omessi.[1].
$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a$ con $a \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a 1+x}{x} = \log_a e$.

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

[1]per una lista completa si visiti illink

Capitolo 4

Continuità e discontinuità di una funzione reale

In questo capitolo affrontiamo lo studio della continuità di una funzione reale, definendola rigorosamente, e classificando le tipologie di *discontinuità*. Introdurremo, inoltre, alcuni teoremi circa funzioni combinazione lineare, funzioni prodotto, rapporto e, infine, funzioni composte, che ci saranno utili nello studio della continuità delle stesse.

4.1 *Definizione di continuità*

Sia $f : D_f \to C_f \; x \mapsto y = f(x)$
Sia inoltre $x_0 \in$Ð$D_f \cap D_f$ (x_0 è un punto del dominio).

Definizione

f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definizione

f si dice continua in $A \subseteq D_f$ se è continua $\forall x \in A$ (in ogni punto di A).

Definizione

f è continua a destra(sinistra) se $\lim_{x \to x_0^{+(-)}} f(x) = f(x_0)$.

4.2 Classificazione di discontinuità

4.2.1 Discontinuità di prima specie

Si definisce x_0 punto di discontinuità di prima specie se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$ con $l \neq m$.

4.2.2 Discontinuità di seconda specie

Si definisce x_0 punto di discontinuità di seconda specie se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

4.2.3 Discontinuità di terza specie

Si definisce x_0 punto di discontinuità di terza specie se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ma $f(x_0) \neq l$.

4.3 Teoremi fondamentali sulla continuità delle funzioni reali

4.3.1 Teorema sulla continuità delle funzioni elementari

Tutte le funzioni elementari risultano continue nei rispettivi domini.

4.3.2 Teorema sulla continuità della funzione combinazione lineare di funzioni

Siano f e g continue in x_0 e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Allora $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ è continua in x_0. (si noti che deve risultare $x_0 \in Đ F(x) \cap D_F$)

4.3.3 Teorema sulla continuità della funzione prodotto di funzioni

Siano f e g continue in x_0. Allora $F(x) = f(x) * g(x)$ è continua in x_0

4.3.4 Teorema sulla continuità della funzione rapporto di funzioni

Siano f e g continue in x_0 e $x_0 \in Đ D_f \cap D_f$. Allora $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0

4.3.5 *Teorema sulla continuità della funzione composizione di funzioni*

Sia $t = f(x)$ continua in x_0 e $y = g(t)$ continua in $t_0 = f(x_0)$. Allora $F(x) = g[f(x)]$ è continua in x_0

4.3.6 *Teorema dei valori intermedi*

Sia f funzione continua in un **intervallo I**. Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Allora:

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad conpreso \quad tra \quad f(a) \quad e \quad f(b) \quad \exists \quad x_0 \in [a,b] \, / f(x_0) = c.$$

Questo teorema è utilizzato per determinare il codominio di f.

4.3.7 *Teorema dell'esistenza degli zeri*

Sia f contiuna in I. Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Allora se $f(a) * f(b) < 0 \quad \exists \quad x_0 \in (a,b)/f(x_0) = 0$.
Questo teorema è utilizzato per garantire l'esistenza di uno zero, tuttavia non ci dice ne quanti ne esistono, ne "chi"sono.

4.3.8 *Teorema di Weierstrass*

Sia f continua in [a,b]. Allora f ammette min e Max assoluti.

Capitolo 5

Derivata di una funzione reale

5.1 Definizione di derivata e di rapporto incrementale

$f : D_f \to C_f$
$x \mapsto y = f(x)$
$x_0 \in D_f \cap$ ÐD_f
$h \in \mathbb{R}/x_0 + h \in D_f$
Si definisce rapporto incrementale:

$$\frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$$

Definizione

Se il rapporto incrementale converge a $l \in \mathbb{R}$ per $h \to 0$, allora f si dice derivabile in x_0 ed l si dice derivata prima di f in x_0.

Definizione

f si dice derivabile in $A \subseteq D_f$ se è derivabile in ogni punto di A.

5.2 Derivate delle funzioni elementari

In questo capitolo elenchiamo le derivate delle funzioni elementari omettendo la dimostrazione(calcolo del limite del rapporto incrementale).

$f(x) = k$
$D_f = \mathbb{R}$

$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = 0 \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = x$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = 1 \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = x^2$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = 2x \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = nx^{n-1} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \frac{1}{x}$
$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$
$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = x^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = (-n)x^{-n-1} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \sqrt{x}$
$D_f = [0, +\infty)$
$D_f^{'} = D_f - \{0\}$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f - \{0\}$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \sqrt[n]{x}$

caso 1

$n \in \mathbb{N}$ pari. $D_f = [0, +\infty)$
$D_f^{'} = (0, +\infty)$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

caso 2

$n \in \mathbb{N}$ dispari $D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = \mathbb{R} - \{0\}$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ e $a > 0$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = a^x \ln a \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = |x|$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f - \{0\}$
e si ha $f^{'}(x) = 1$ se $x > 0$, $f^{'}(x) = -1$ se $x < 0$.

$f(x) = \log_a x$

$D_f = (0, +\infty)$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$r \in \mathbb{Q}^+ - \mathbb{N}$
$r = \frac{n}{m}, (n, m \in \mathbb{N}, coprimi, m \neq 1)$
$f(x) = x^r$
$D_f = [0, +\infty)$
Se $r > 1$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = rx^{r-1}$ se $x > 0$, $f^{'}(x) = 0$ se $x = 0$.
Se $0 < r < 1$
$D_f^{'} = (0, +\infty)$
e si ha $f^{'}(x) = rx^{r-1}$

$r \in \mathbb{Q}^- - \mathbb{Z}$
$f(x) = x^r$
$D_f = (0, +\infty)$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = rx^{r-1}$

$\alpha \in \mathbb{I}^+$
$f(x) = x^\alpha$
$D_f = [0, +\infty)$
Se $\alpha > 1$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ se $x > 0$, $f^{'}(x) = 0$ se $x = 0$.
Se $0 < \alpha < 1$
$D_f^{'} = (0, +\infty)$
e si ha $f^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$\alpha \in \mathbb{I}^-$
$f(x) = x^\alpha$
$D_f = (0, +\infty)$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

5.3 Derivate delle funzioni trigonometriche

$f(x) = \sin x$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = \cos x \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \cos x$
$D_f = \mathbb{R}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = -\sin x \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \tan x$
$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \cot x$
$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$
$D_f^{'} = D_f$
e si ha $f^{'}(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \arcsin x$
$D_f = [-1, 1]$
$D_f^{'} = D_f - \{\pm 1\}$
e si ha $f^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

$f(x) = \arccos x$
$D_f = [-1, 1]$
$D_f^{'} = D_f - \{\pm 1\}$
e si ha $f^{'}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in D_f^{'}$.

5.4 Teoremi fondamentali sulle derivate

5.4.1 *Teorema sulla relazione continuità/derivabilità*

Se f derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
(si noti che se f continua in x_0 non è detto che è derivabile in x_0).

5.4.2 *Teorema sulla derivabilità della funzione combinazione lineare di funzioni*

Siano f e g derivabili in x_0 e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Allora $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ è derivabile in x_0 e risulta $F'(x) = c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)$.

5.4.3 *Teorema sulla derivabilità della funzione prodotto di funzioni*

Siano f e g derivabili in x_0. Allora $F(x) = f(x) * g(x)$ è derivabile in x_0 e risulta $F'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$.

5.4.4 *Teorema sulla derivabilità della funzione rapporto di funzioni*

Siano f e g derivabili in x_0 e $x_0 \in$Ð$D_f \cap D_f$(ovvero g(x) non deve annullarsi). Allora $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 e risulta $F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

5.4.5 *Teorema sulla derivabilità della funzione composta*

Sia $t = f(x)$ derivabile in x_0 e $y = g(t)$ derivabile in $t_0 = f(x_0)$. Allora $F(x) = g[f(x)]$ è derivabile in x_0 e risulta: $\frac{dF}{dx} = \frac{dg}{dt}(t_0) * \frac{df}{dx}(x_0)$.

5.4.6 *Teorema sulla derivabilità della funzione inversa*

Sia $y = f(x)$ continua e invertibile in $I_\delta(x_0)$, e sia $x = f^{-1}(y)$ l'inversa:

- Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, dove $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
- Se f derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$ allora f^{-1} non è derivabile in $y_0 = f(x_0)$.

- Se f non derivabile in x_0 in quanto il limite del rapporto incrementale è $\pm\infty$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = 0$.

5.4.7 *Teorema di Lagrange*

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\exists c \in (a, b)/$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Il teorema afferma l'esistenza di una retta tangente al grafico parallela alla secante passante per a e b.

5.4.8 *Teorema della derivata di una funzione costante in un intervallo*

Sia $f(x) = k$ **in un intervallo I**$\subseteq D_f \rightleftarrows f$ è derivabile in I e si ha $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$.

5.4.9 *Teorema di De L'Hospital*

Sia $lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Siano f e g derivabili in $I_\delta(\lambda) - \{\lambda\}$, e siano entrambe divergenti o infinitesime.[1] Siano $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ definite in $I_\delta(\lambda) - \{\lambda\}$. Sia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **regolare** per $x \to \lambda$. Allora $lim_{x\to\lambda}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to\lambda}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5.4.10 *Teorema sulla monotonia di una funzione attraverso il segno di $f'(x)$*

Sia f derivabile in un intervallo I. Allora se $f'(x) \geq 0$ in I e $\nexists$ intervallo $I'/I' \subseteq \{x \in I/f'(x) = 0\}$, ovvero la derivata può annularsi ma in punti la cui unione non genera un intervallo $\Rightarrow f \uparrow$(strettamente crescente) in I . Ovviamente vale la relazione inversa($f'(x) \leq 0$ in $I \Rightarrow f \downarrow$ in I).

5.5 Teoremi sul limite di una derivata

Sia f continua in $I_\delta(\lambda)$ e derivabile in $I_\delta(\lambda) - \{\lambda\}$.

- Se $lim_{x\to x_0}f'(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile in x_0 e si ha $f'(x_0) = l$.

[1] Dire che $lim_{x\to\lambda}f(x) = 0$ equivale a dire che f è infinitesima per $x \to \lambda$.

- Se $lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ e Se $lim_{x\to x_0^-} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, con $l \neq m$, allora f non derivabile in x_0 e quest'ultimo è detto **punto angoloso**.
- Se $lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ e Se $lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$, allora f non derivabile in x_0 e quest'ultimo è detto **punto angoloso**.
- Se $lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$ e Se $lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \mp\infty$, allora f non derivabile in x_0 e quest'ultimo è detto **punto cuspidale** e $(x_0, f(x_0))$ è detta **cuspide**.
- Se $lim_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$. Allora f non derivabile in x_0 e quest'ultimo è detto **punto di flesso a tangente verticale** e $(x_0, f(x_0))$ è detto **flesso a tangente verticale**.

5.6 Ricerca dei massimi e minimi relativi

In questo capito definiamo i punti di Max(min) relativi e introduciamo alcuni strumenti(teoremi) per la corretta ricerca e individuazione di essi.

Definizione

$x_0 \in D_f$ si dice punto di max(min) relativo per f se $\exists\delta > 0/\forall x \in I_\delta(x_0) \cap D_f$ e si ha $f(x) \leq f(x_0)$ (per il min si ha $f(x) \geq f(x_0)$).

Osservazione

Un punto di max(min) assoluto è anche punto di max(min) relativo.

Teorema

Sia $x_0 \in \dot{D}_f$ (punto interno) punto di estremo relativo per f. Allora, se **inoltre** f **è derivabile in** x_0, $f'(x_0) = 0$.

Quindi possiamo concludere che dobbiamo ricercare i punti di max(min) in questi tre insiemi:

$$A = \{x \in \dot{D}_f \cap D'_f / f'(x) = 0\}$$
$$B = \{\dot{D}_f - D'_f\}$$
$$C = \{D_f - \dot{D}_f\}$$

Dove l'insieme A rappresenta quello dei punti interni di f (e in cui f è derivabile) per cui $f'(x) = 0$; l'insieme B rappresenta l'insieme dei punti interni in cui f non è derivabile, infine l'insieme C rappresenta l'insieme contenente i soli estremi di f. Individuati i tre insiemi applichiamo un teorema per stabilire con certezza se gli elementi che li costituiscono sono realmente punti di max(min) relativi.

Teorema

Sia f continua in $I_\delta(\lambda)$ e derivabile in $I_\delta(\lambda) - \{\lambda\}$. Allora se $f'(x) < 0$ in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f'(x) > 0$ in $(x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow x_0$ è punto di minimo relativo per f. Per il max relativo basta invertire le relazioni. E' utile osservare che se $f'(x)$ cresce(decresce) sia a dx che a sx, allora non abbiamo ne max(ne min) relativo.

5.7 Definizione di funzione concava/convessa

Sia f derivabile in un **intervallo I**. f si dice convessa(concava) in I, se $\forall x, x_0 \in I$ si ha:

$$f(x) \geq (\leq) f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ovvero la curva sta sempre sopra alla retta tangente se convessa(relazione $\geq$) mentre la curva è sempre sotto alla retta tangente se concava(relazione $\leq$).

5.7.1 *Condizione sufficiente della concavità(convessità)*

Sia f derivabile due volte in un **intervallo I**. Allora se $f''(x) \geq 0$ in $I \Rightarrow f$ è convessa in I; se $f''(x) \leq 0$ in $I \Rightarrow f$ è concava in I.
Tuttavia bisogna osservare che **non deve esistere** un intervallo in cui $f''(x) = 0$.