1. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}$$

Dalle formule di MacLaurin si ha, per $n\to\infty$,

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left[\frac{1}{n^2}\right]$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left[\frac{1}{n^2}\right]\right)-n} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}+o[1]\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. Determinare tutti i numeri complessi z soluzioni dell'equazioni $|z+2i|^2 e^{5z} = 8e^{5(\operatorname{Re} z)}$ tali che $|\operatorname{Im} z|<1$.

Posto $z=x+iy$, l'equazione diventa $|x+i(y+2)|^2 e^{5x+5iy} = 8e^{5x}$, cioè

$$\left[x^2+(y+2)^2\right]e^{5iy}=8$$

Dalla formula di Eulero si ottiene

$$\left[x^2+(y+2)^2\right]\left(\cos(5y)+i\sin(5y)\right)=8$$

Che equivale al sistema

$$\begin{cases}\left[x^2+(y+2)^2\right]\cos(5y)=8\\ \left[x^2+(y+2)^2\right]\sin(5y)=0\end{cases}.$$

La seconda equazione è soddisfatta quando $x=0\wedge y=-2$ (ma questi valori non vanno accettati in quanto non soddisfano la prima equazione), oppure quando $5y=k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$, cioè $y=\frac{k\pi}{5} \quad \forall k\in\mathbb{Z}$. Dalla condizione $|\operatorname{Im} z|<1$, si possono accettare solo i seguenti tre valori di *y*: $y=-\frac{\pi}{5},0,\frac{\pi}{5}$ (che si ottengono rispettivamente per $k=-1,0,1$). La prima equazione è soddisfatta solo per $y=0$ e, in tal caso, si ottiene $x^2+4=8$ cioè $x=\pm 2$. In definitiva le soluzioni del problema sono $z=\pm 2$.

3. Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2n}}-1+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{n}}$

Dalle formule di MacLaurin si ha, per $n\to\infty$,

$$e^{-\frac{1}{2n}}=1-\frac{1}{2n}+o\left[\frac{1}{n}\right]$$

e

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+o\left[\frac{1}{n}\right].$$

Quindi $e^{-\frac{1}{2n}}-1+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{4n}+o\left[\frac{1}{n}\right]$

da cui segue che, per $n\to\infty$, $e^{-\frac{1}{2n}}-1+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{4n}$

e quindi

$$\left[e^{-\frac{1}{2n}}-1+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]n^{-1/2}\sim-\frac{1}{4n^{3/2}}$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie converge.

4. Determinare il dominio e l'espressione esplicita della funzione $f(x)$ che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{1}{|x-1|+|x+2|} \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Si ha $f(x)=\int_0^x \frac{1}{|t-1|+|t+2|}dt+1$.

La funzione integranda $\frac{1}{|t-1|+|t+2|}=\begin{cases}\dfrac{1}{-2t-1} & \text{se } t<-2 \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } -2\le t<1 \\ \dfrac{1}{2t+1} & \text{se } t\ge 1\end{cases}$ è continua in R. Quindi la funzione integrale $f(x)$ è definita in tutto R. Si hanno i seguenti casi:

Se $x<-2$, allora $f(x)=\int_0^{-2}\frac{1}{3}dt+\int_{-2}^{x}\frac{dt}{-2t-1}+1$, cioè $f(x)=\int_0^{-2}\frac{1}{3}dt-\int_{-2}^{x}\frac{dt}{2t+1}+1$;

Se $-2 \le x < 1$, allora $f(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\,dt + 1$;

Se $x \ge 1$, allora $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}\,dt + \int_1^x \frac{dt}{2t+1} + 1$.

SI ha $\int \frac{dt}{2t+1} = \ln\sqrt{|2t+1|} + c$ e $\int \frac{1}{3}\,dt = \frac{t}{3} + c$. Quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\ln\sqrt{|2x+1|} + \ln\sqrt{3} + \frac{1}{3} & \text{se } x < -2 \\ \frac{x}{3} + 1 & \text{se } -2 \le x < 1 \\ \frac{4}{3} + \ln\sqrt{|2x+1|} - \ln\sqrt{3} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

1. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} e^{-n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-n}$$

Dalle formule di MacLaurin si ha, per $n\to\infty$,

$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left[\frac{1}{n^2}\right]$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left[\frac{1}{n^2}\right]\right)-n} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{1}{2}+o[1]\right)} = \sqrt{e}\ .$$

2. Determinare tutti i numeri complessi z soluzioni dell'equazioni $|z+2i|^2 e^{4z} = 13e^{4(\mathrm{Re}\, z)}$ tali che $|\mathrm{Im}\, z|<1$.

Posto $z = x+iy$, l'equazione diventa $|x+i(y+2)|^2 e^{4x+4iy} = 13e^{4x}$, cioè

$$\left[x^2+(y+2)^2\right]e^{4iy} = 13$$

Dalla formula di Eulero si ottiene

$$\left[x^2+(y+2)^2\right]\left(\cos(4y)+i\sin(4y)\right) = 13$$

Che equivale al sistema

$$\begin{cases}\left[x^2+(y+2)^2\right]\cos(4y)=13\\ \left[x^2+(y+2)^2\right]\sin(4y)=0\end{cases}.$$

La seconda equazione è soddisfatta quando $x=0 \wedge y=-2$ (ma questi valori non vanno accettati in quanto non soddisfano la prima equazione), oppure quando $4y = k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$, cioè $y=\frac{k\pi}{4} \quad \forall k\in\mathbb{Z}$. Dalla condizione $|\mathrm{Im}\, z|<1$, si possono accettare solo i seguenti tre valori di *y*: $y=-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4}$ (che si ottengono rispettivamente per $k=-1,0,1$). La prima equazione è soddisfatta solo per $y=0$ e, in tal caso, si ottiene $x^2+4=13$ cioè $x=\pm3$. In definitiva le soluzioni del problema sono $z=\pm3$.

3. Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\frac{3}{2n}}-1-\frac{3}{4}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Dalle formule di MacLaurin si ha, per $n \to \infty$,

$$e^{-\frac{3}{2n}} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left[\frac{1}{n}\right]$$

e

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left[\frac{1}{n}\right].$$

Quindi $e^{-\frac{3}{2n}} - 1 - \frac{3}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{9}{4n} + o\left[\frac{1}{n}\right]$

da cui segue che, per $n \to \infty$, $e^{-\frac{3}{2n}} - 1 + \frac{3}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{9}{4n}$

e quindi

$$\left[e^{-\frac{3}{2n}} - 1 + \frac{3}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] n^{-3/2} \sim -\frac{9}{4n^{5/2}}$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie converge.

5. Determinare il dominio e l'espressione esplicita della funzione $f(x)$ che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{|x-2| + |x+1|} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

Si ha $f(x) = \int_0^x \frac{1}{|t-2| + |t+1|}\,dt - 1$.

La funzione integranda $\frac{1}{|t-2| + |t+1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{-2t+1} & \text{se } t < -1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } -1 \le t < 2 \\ \dfrac{1}{2t-1} & \text{se } t \ge 2 \end{cases}$ è continua in R. Quindi la funzione integrale $f(x)$ è definita in tutto R. Si hanno i seguenti casi:

Se $x < -1$, allora $f(x) = \int_0^{-1} \frac{1}{3}\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{dt}{-2t+1} - 1$, cioè $f(x) = \int_0^{-1} \frac{1}{3}\,dt - \int_{-2}^{x} \frac{dt}{2t-1} - 1$;

Se $-1 \le x < 2$, allora $f(x) = \int_0^x \frac{1}{3}\,dt + 1$;

Se $x \geq 2$, allora $f(x) = \int_0^2 \frac{1}{3} dt + \int_2^x \frac{dt}{2t-1} - 1$.

SI ha $\int \frac{dt}{2t-1} = \ln\sqrt{|2t-1|} + c$ e $\int \frac{1}{3} dt = \frac{t}{3} + c$. Quindi

$$f(x) = \begin{cases} -\ln\sqrt{|2x-1|} + \ln\sqrt{3} - \frac{4}{3} & \text{se } x < -1 \\ \frac{x}{3} - 1 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ \ln\sqrt{|2x-1|} - \frac{1}{3} - \ln\sqrt{3} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$