Appello estivo 2022

Fila A

1. $x^2 y'' - 2y = \log x^2$.

2. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)^n$, stabilire l'insieme I dove la serie converge puntualmente e stabilire se converge uniformemente in $[0, 1]$.

3. Calcolare $I = \iint_D \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy$, ove D è dato da

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x,\ x \le y,\ x + y \le 2\}$. Calcolare poi $\iint_E \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy$, ove E è il trapezio di vertici (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 2).

4. Trovare l'integrale generale di $y' - 3y = e^t$, $y(0) = 0$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Risolvere lo stesso esercizio ponendo $c = f(0)$.

Soluzioni.

1. E' un'equazione di Eulero. Si esegue un cambio di variabile ponendo

$x = e^t$, $t = \log x^2$, $x > 0$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dt}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\,\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\,\frac{d^2y}{dt^2}$.

Consideriamo poi l'omogenea associata:

$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\,\dot{y} + \frac{1}{x^2}\ddot{y}\right) - 2y = 0,\ \ \ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0,$

$y = e^{\lambda t},\ e^{\lambda t}(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,\ \lambda_{1,2} = \{2, -1\},$

la soluzione dell'omogenea è data da $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$.

Risulta $\log x^2 = 2\log x = 2t$: $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 2t$.

Si cerca una soluzione particolare $\bar{y} = At + B,\ \bar{y}' = A,\ \bar{y}'' = 0$: sostituendo, otteniamo

$-A - 2At - 2B = 2t$, $\begin{cases} -A - 2B = 0 \\ -2A = 2 \end{cases}$, $\ A = -1,\ 2B = -A,\ B = \frac{1}{2}$

e infine $\bar{y} = -t + \frac{1}{2}$.

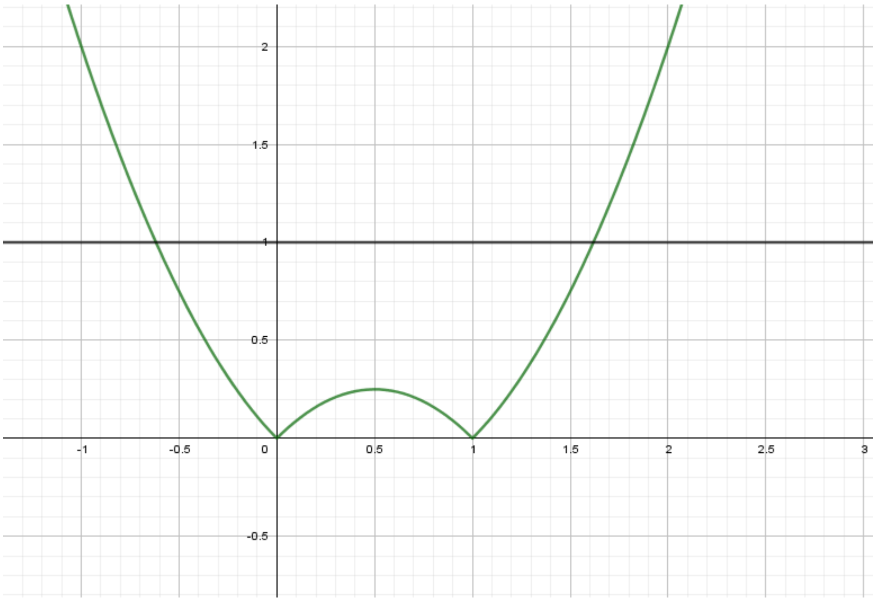
La soluzione quindi è $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - t + \frac{1}{2} \ \rightarrow y = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x} - \log x + \frac{1}{2}$.

2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)^n$ è una serie geometrica di ragione $x(1-x)$ e quindi converge se il modulo della ragione è minore di 1: $|x(1-x)| < 1$. Dal grafico di $y = |x(1-x)|$, oppure, procedendo algebricamente e risolvendo il sistema

$\begin{cases} x - x^2 < 1 \\ x - x^2 > -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \ \ \textit{sempre soddisfatta} \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$

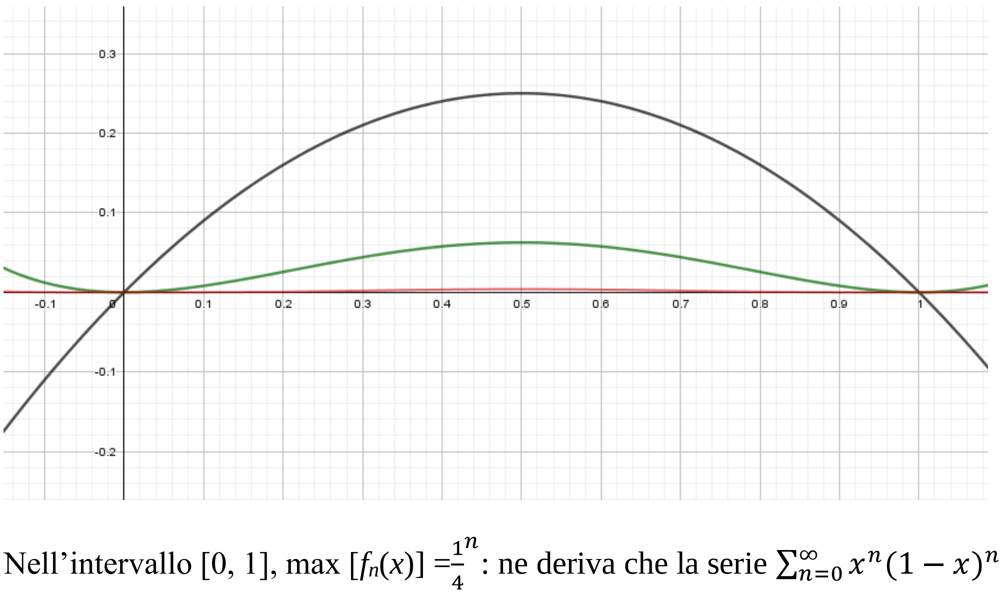
si ricava che la condizione è verificata per

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Posto $I = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, risulta, $\forall x \in I,\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^n = \frac{1}{1-x(1-x)} = \frac{1}{x^2-x+1}$: la serie converge puntualmente in I. La serie non converge negli estremi di I: il termine generico $x^n(1-x)^n$ della serie agli estremi dell'intervallo vale $f_n\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) = (-1)^n$ e non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

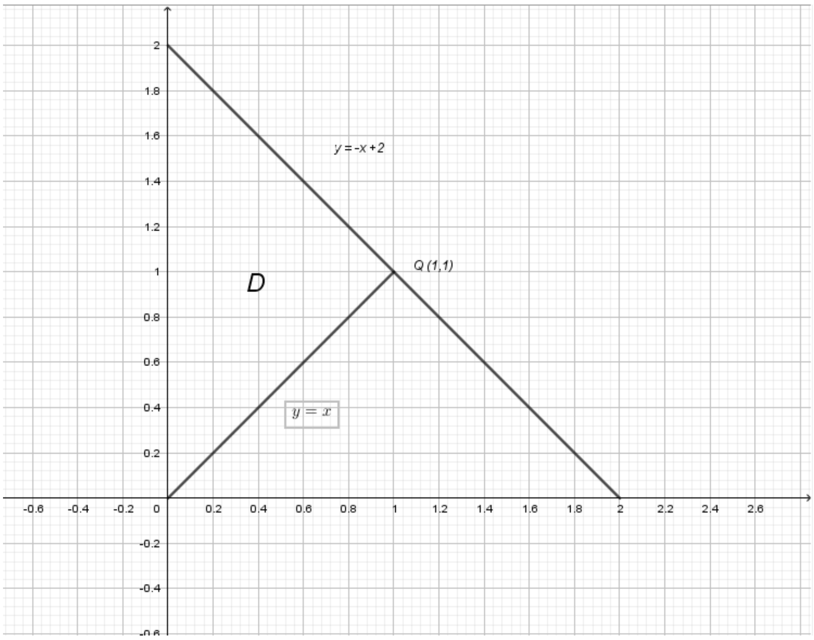
Consideriamo la derivata di $f_n(x) = (-x^2+x)^n$, uguale a $n(-2x+1)(-x^2+x)^{n-1}$: risulta $f_n'(x) = 0$ in x =0, x = 1, $x = \frac{1}{2}$. In conclusione, $f_n(x)$ presenta nell'intervallo [0, 1] un massimo in $x = \frac{1}{2}$.



Nell'intervallo [0, 1], max $[f_n(x)] = \frac{1}{4}^n$: ne deriva che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^n$ è maggiorata in [0, 1] dalla serie numerica a termini positivi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ e pertanto è ivi totalmente e uniformemente convergente.

3. Calcolare $I = \iint_D \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy$, ove D è dato da $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x,\ x \le y,\ x + y \le 2\}$.

Calcolare poi $\iint_E \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy$, ove E è il trapezio di vertici (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 2).



$$Q \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}, \quad Q(1, 1).$$

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{-x+2} \frac{x}{x+y+1}\, dy = \int_0^1 x\, dx\, [\log(x + y + 1)]_{y=x}^{y=-x+2} = \int_0^1 x\, dx\, \{\log 3 - \log(2x + 1)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 - \int_0^1 x \log(2x + 1)\, dx.$$

$$\int_0^1 x \log(2x + 1)\, dx = \frac{x^2}{2}[\log(2x + 1)] \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{2}{2x + 1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 - \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\log 3 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}x}{2x+1} \right) dx =$$

$$\left\{ dividendo\ x^2\ per\ 2x + 1\ si\ ottiene\ \frac{1}{2}x\ più\ \frac{-\frac{1}{2}x}{2x + 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x+1-1}{2x+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x \Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log(2x + 1) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{8}\log 3 = \frac{3}{8}\log 3.$$

A questo punto, $I = \frac{1}{2}\log 3 - \int_0^1 x \log(2x+1)\, dx = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{3}{8}\log 3 = \frac{1}{8}\log 3.$

Passiamo al secondo punto:

$\iint_E \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy = \int_0^1 x\, dx \int_0^{-x+2} \frac{1}{x+y+1}\, dy = \int_0^1 x\, dx\, [\log(x+y+1]|_{y=\ 0}^{y=-x+2} =$

$= \int_0^1 x\, dx\, [\log 3 - \log(x+1)] = \log 3\ \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \left\{\frac{x^2}{2}\ \log(x+1)|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\ dx\right\} =$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\ dx =$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x|_0^1 + \frac{1}{2}\ \log(x+1)|_0^1 = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 =$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4}$ -

4. $\mathcal{L}[\, y'] - 3\, \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^t]$, $\quad s\mathcal{L}[y] - 3\, \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1}$.

$\mathcal{L}[y]\ (s-3) = \frac{1}{s-1}$, $\quad y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\ \ \frac{1}{s-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1}\right]$.

$As - A + Bs - 3B = 1, \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 3B = 1 \end{cases}, \quad A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}.$

$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}\ e^t.$

Se $c = f(0)$, al secondo passaggio $s\mathcal{L}[y] - 3\, \mathcal{L}[y] - c = \frac{1}{s-1}$.

$\mathcal{L}[y]\ (s-3) = c + \frac{1}{s-1}$, $\quad y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\ \ \frac{1}{s-1} + \frac{c}{s-3}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\ \ \frac{1}{s-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s-3}\right] = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}\ e^t + ce^{3t}.$

In conclusione, $y = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}\ e^t + ce^{3t}$.

Fila B

1. $x^2y'' - 2xy' + 2y = (\log x)^2 + 1.$

2. Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1+2x)^n$, stabilire l'insieme I dove la serie converge puntualmente e stabilire se converge uniformemente in [0, 1].

3. Calcolare $I = \iint_D \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy$, ove D è dato da

$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x,\ x \ge y,\ x+y \le 2\}.$

4. Trovare l'integrale generale di $y' + 5y = 6$, $y(0) = 0$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Risolvere lo stesso esercizio ponendo $c = f(0)$.

Soluzioni.

1. E' un'equazione di Eulero. Si esegue un cambio di variabile ponendo

$x = e^t$, $t = \log x$, $x > 0$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$.

Consideriamo poi l'omogenea associata:

$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\dot{y} + \frac{1}{x^2}\ddot{y}\right) - 2x\frac{1}{x}\dot{y} + 2y = 0$, $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$,

$y = e^{\lambda t}$, $e^{\lambda t}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$, $\lambda_{1,2} = \{1,\ 2\}$,

la soluzione dell'omogenea è data da $y = c_1e^t + c_2e^{2t}$.

Risulta $(\log x)^2 + 1 = t^2 + 1$.

Si cerca una soluzione particolare $\bar{y} = At^2 + Bt + C$, $\bar{y}' = 2At + B$, $\bar{y}'' = 2A$: sostituendo, otteniamo

$2A - 6At - 3B + 2At^2 + 2Bt + 2C = t^2 + 1$, $\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 0 \end{cases}$,

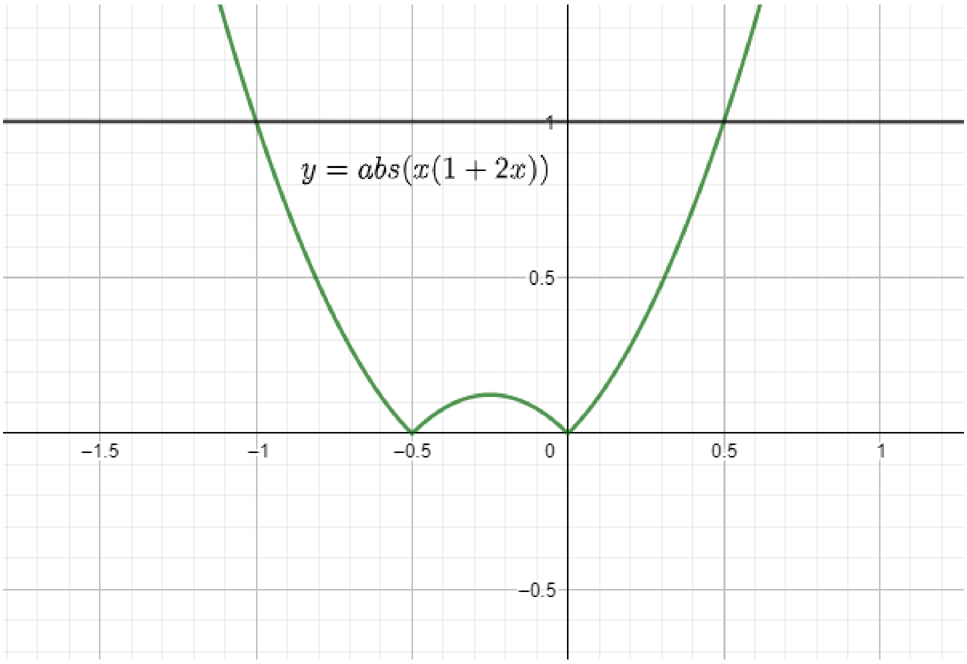
$A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $2\frac{1}{2} - 3\frac{3}{2} + 2C = 1$, $C = \frac{9}{4}$,

e infine $\bar{y} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$.

La soluzione quindi è

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} \ \rightarrow y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{3}{2}\log x + \frac{9}{4}.$$

2.



La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1+2x)^n$ è una serie geometrica di ragione x (1+2x) e quindi converge se il modulo della ragione è minore di 1: $|x(1+2x)| < 1$. Dal grafico di $y = |x(1+2x)|$, oppure, procedendo algebricamente e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x+2x^2 < 1 \\ x+2x^2 > -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x^2+x-1 < 0 \\ 2x^2+x+1 > 0, \ sempre\ verificata \end{cases}$$

si ricava che la condizione è verificata per

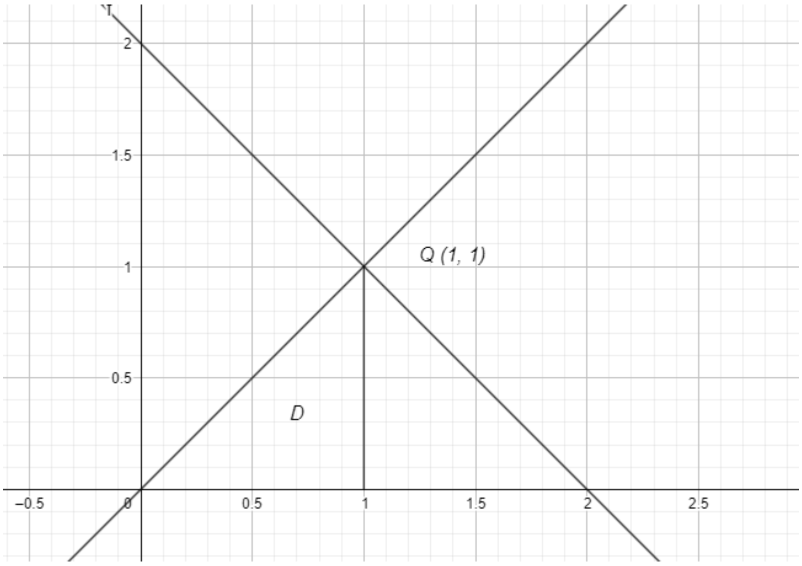
$-1 < x < \frac{1}{2}$.

Posto $I = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, risulta, $\forall x \, \epsilon I$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1+2x)^n = \frac{1}{1-x(1+2x)} = \frac{1}{-2x^2-x+1}$: la serie converge puntualmente in I. La serie non converge negli estremi di I.

Consideriamo la derivata di $f_n(x) = (2x^2+x)^n$, uguale a $n(4x+1)(2x^2+x)^{n-1}$: risulta $f_n'(x) = 0$ in $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{4}$. In conclusione, $f_n(x)$ presenta nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ un minimo in $x = -\frac{1}{4}$. Poiché $|f_n(x)| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n$ in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ la serie è maggiorata in modulo dalla serie numerica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1+2x)^n$ risulta totalmente e quindi uniformemente convergente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

3. 3. Calcolare $I = \iint_D \frac{x}{x+y+1}\, dx\, dy$, ove D è dato da

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x,\ x \geq y,\ x + y \leq 2\}$



$Q \begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases}, \quad Q(1, 1).$

$I = I_1 + I_2.$

$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x}{x+y+1}\, dy = \int_0^1 x dx \left\{ \log(x+y+1) \Big|_{y=0}^{y=x} \right\} = \int_0^1 x\, [\log(2x+1) - \log(x+1)]\ dx =$

$= \frac{x^2}{2}\log(2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}\,dx - \left\{\frac{x^2}{2}\log(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{x+1}\,dx\right\} =$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{x}{2x+1}\right)dx - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{x+1}\right)dx =$

$\left\{ dividendo\ x^2\ per\ 2x+1\ si\ ottiene\ \frac{1}{2}x\ più\ \frac{-\frac{1}{2}x}{2x+1} \right\}$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2x+1-1}{2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\,\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\log(x+1)\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log(2x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2 =$

$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log 3 = \frac{3}{8}\log 3 - \frac{1}{4}$.

$I_2 = \int_1^2 dx \int_0^{-x+2} \frac{x}{x+y+1}\,dy = \int_1^2 x dx \left\{\log(x+y+1)\Big|_{y=0}^{y=-x+2}\right\} =$

$= \int_1^2 x[\log 3 - \log(x+1)]dx = (\log 3)\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - \int_1^2 x\log(x+1)dx =$

$= 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 3 - \left\{\frac{x^2}{2}\,\log(x+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x+1}\,dx\right\} =$

$= \frac{3}{2}\log 3 - 2\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x - \frac{x}{x+1}\right)dx =$

$= -\frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\log(x+1)\Big|_1^2 =$

$= -\frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{4}$.

$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{8}\log 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}\log 3.$

4. Trovare l'integrale generale di $y' + 5y = 6$, $y(0) = 0$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Risolvere lo stesso esercizio ponendo $c = f(0)$.

$\mathcal{L}[\,y'] + 5\,\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[6]$, $\quad s\mathcal{L}[y] + 5\,\mathcal{L}[y] = \frac{6}{s}$.

$\mathcal{L}[y]\,(s+5) = \frac{6}{s}$, $\quad y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s(s+5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}\right]$.

$As + 5A + Bs = 6$, $\begin{cases} A + B = 0 \\ 5A = 6 \end{cases}$, $A = \frac{6}{5}$, $B = -\frac{6}{5}$.

$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+5)}\right] = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\, e^{-5t}$.

Se $c = f(0)$, al secondo passaggio $s\mathcal{L}[y] + 5\,\mathcal{L}[y] = \frac{6}{s} + c$.

$\mathcal{L}[y]\,(s+5) = c + \frac{6}{s}$, $y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s+5} + \frac{6}{s(s+5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s+5} + \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+5)}\right] = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\, e^{-5t} + ce^{-5t}$.

In conclusione, $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\, e^{-5t} + ce^{-5t}$.