Esercizi di Analisi Matematica I

(Prof. Pierpaolo Natalini)

Roberta Bianchini

15 gennaio 2017

FOGLIO 3

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 - x\sin x}{x^2\ln(1+x^2) - \cos(x^2) + 1}$$

2. Costruire il polinomio di MacLaurin di ordine 2 della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$. Calcolare, inoltre
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2(\sin x - x\sqrt{1+x})}{x(1-\cos x)}$$

3. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α
$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

4. Calcolare, al variare del parametro reale α
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x^2} - 1 + x^2}{x(\sin(3x) - 3x)}$$

5. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(3x) + x^3}{x^{1/3}\sin x^{5/3}}$$

6. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^\alpha}$$

Soluzioni

1. Scriviamo lo sviluppo di McLaurin delle funzioni e^{x^2}, $\sin x$, $\cos(x^2)$ e $\ln(1+x^2)$.

   Poniamo $t = x^2$e, per $x \to 0$, si ha:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

   cioè

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

   e

$$\ln(1+t) = t + o(t),$$

   cioè

$$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2).$$

   Sostutiamo nel limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 - x\sin x}{x^2\ln(1+x^2) - \cos x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4) - 1 - x^2 + x^4/6 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4) - 1 + x^4/2 + o(x^4) + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^4/3 + o(x^4)}{3x^4/2 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2/3 + o(1)}{3/2 + o(1)} = \frac{4}{9}.$$

2. Scriviamo il polinomio di McLaurin di ordine 2 della funzione $\sqrt{1+x}$. Dato che

$$(\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$(\sqrt{1+x})'' = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}},$$

per $x \to 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Scriviamo il polinomio di McLaurin delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Sostituiamo nel limite, e si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2(\sin x - x\sqrt{1+x})}{x(1-\cos x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2(x - x^3/6 + o(x^3) - x - x^2/2 + x^3/8 + o(x^3))}{x^3/2 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/3 + x^3/4 + o(x^3)}{x^3/2 + o(x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/12 + o(x^3)}{x^3/2 + o(x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1/12 + o(1)}{1/2 + o(1)} = -\frac{1}{6}.$$

3. Trasformiamo, attraverso un cambio di variabile del tipo $t = f(x)$, il limite per $x \to +\infty$ nel limite per $t \to 0^+$. In questo modo, per calcolare il limite possiamo sviluppare il polinomio di McLaurin delle funzioni considerate. Per fare questo poniamo $t = \frac{1}{x}$. Usiamo il seguente sviluppo di McLaurin

$$\ln(1+t) = t + o(t)$$

nel limite, e otteniamo:

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^\alpha}\left(t+o(t)\right)\right)=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[1-\frac{1}{t^{\alpha-2}}(1+o(1))\right]=$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left[1-t^{2-\alpha}(1+o(1))\right]=$$

$$=\begin{cases}\frac{0}{0}\text{ forma indet.} & \text{se } \alpha=2\\ +\infty & \text{se } 0<\alpha<2\\ -\infty & \text{se } \alpha>2\end{cases}$$

Il primo caso dà origine a una forma indeterminata, che dobbiamo studiare. Per fare questo sviluppiamo $\ln(1+t)$ fino al secondo ordine:

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2),$$

sostituiamo,

$$\lim_{t\to o^+}\frac{1}{t}\left[1-(1-\frac{t}{2}+o(t))\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}$$

Dunque possiamo concludere che il limite è:

$$\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } \alpha=2\\ +\infty & \text{se } 0<\alpha<2\\ -\infty & \text{se } \alpha>2\end{cases}$$

4. Sviluppiamo vicino a 0, attraverso la formula di McLaurin, le funzioni $e^{\alpha x^2}$ e $\sin(3x)$. Ponendo $t=x^2$ abbiamo:

$$e^{\alpha x^2}=e^{\alpha t}=1+\alpha t+\frac{\alpha^2t^2}{2}+o(t^2)=$$

$$=1+\alpha x^2+\frac{\alpha x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\sin(3x)=3x-\frac{27x^3}{3!}+o(x^3)=3x-\frac{9x^3}{2}+o(x^3)$$

Ora possiamo sostituire tutto nel limite, e si ottiene:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4) - 1 + x^2}{3x^2 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4) - 3x^2} =$$

$$= \frac{(\alpha+1)x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)}{-\frac{9x^4}{2} + o(x^4)} =$$

$$= \frac{(\alpha+1) + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{9} & \text{se } \alpha = -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > -1 \end{cases}$$

5. Dobbiamo sviluppare vicino a 0 le funzioni $\cos(3x)$ e $\sin(x^{5/3})$:

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

e, ponendo $t = x^{5/3}$,

$$\sin(t) = t + o(t) = x^{5/3} + o(x^{5/3})$$

Ora, come fatto negli esercizi precedenti, sostituiamo gli sviluppi nel limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(3x)+x^3}{x^{1/3}\sin x^{5/3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1+\frac{9x^2}{2}+o(x^2)+x^3}{x^{1/3}(x^{5/3}+o(x^{5/3})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{9x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{9}{2}+o(1)}{1+o(1)} = \frac{9}{2}.$$

Notiamo che nel terzultimo passaggio abbiamo inglobato il termine x^3 nell'$o(x^2)$.

6. Riportiamo il nostro studio vicino a 0 con la sostituzione $t = x - 1$. Così si ha:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^\alpha} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} =$$

dallo sviluppo dell'arcotangente: $\arctan t = t + o(t)$,

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t + o(t)}{t^\alpha} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1 + o(1)}{t^{\alpha - 1}} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$