Esercitazione 28 Novembre 2018

1. *Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.*

1.1. Se una funzione $f(x)$ è definita in un intervallo aperto (a, b), ha senso chiedersi se esistono

$\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to b} f(x)$.

1.2. Se una funzione $f(x)$ è definita in un intervallo aperto (a, b), ha senso chiedersi se $f(x)$ è continua in a e b.

1.3. Se esistono i limiti sinistro e destro della funzione in un punto, allora esiste anche il limite della funzione nel punto stesso.

1.4. Se una funzione è continua a sinistra e a destra di un punto, allora è continua in quel punto.

1.5. Se una funzione continua si annulla in tutti i punti interni ad un intervallo, allora la funzione si annulla anche negli estremi (purché f sia definita in tali punti).

1.6. Se una funzione continua in un intervallo chiuso assume valori negativi in tutti i punti interni ad esso, allora assume valori non positivi agli estremi dell'intervallo.

1.7. Se due funzioni definite su **R** differiscono in un solo punto, allora non possono essere entrambe continue.

Nei seguenti esercizi, una sola delle affermazioni a), b), … è vera.

2. Sappiamo che $\lim_{x\to 5} f(x) = 5$

2 a) La funzione non può che essere $y = x$

2 b) deve essere necessariamente $f(5) = 5$

2 c) f deve essere definita in $x = 5$

2d) nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

---

3. Sappiamo che $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$

3 a) $f(x)$ ammette limite per $x \to 4$.
3 b) per $x \to 4$ la funzione converge ad un limite finito L.
3 c) la funzione è definita in $x = 4$
3 d) la funzione può non ammettere limite per $x \to 4$.

---

4. Siano f e g due funzioni su **R**. Sappiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Riguardo ai diagrammi di tali funzioni si può asserire che:
4 a) esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) = g(x)$.
4 b) le due curve hanno almeno un punto in comune
4 c) possono non avere alcun punto in comune
4 d) hanno solo un punto in comune.

---

5. Sia *f* definita su **R**. Sappiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +3$
5 a) la funzione è sempre positiva
5 b) da un certo punto in poi, *f* assume solo valori positivi
5 c) la funzione non può assumere mai il valore +3
6 d) la curva di equazione *y* = *f*(*x*) presenta un asintoto orizzontale e si sviluppa sempre al di sopra o al di sotto di tale asintoto.

6. Calcolate $\lim_{x\to+\infty} x \left(\arctan\frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}\right)$

7. Sia $y = f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$.

Una volta determinato l'asintoto obliquo, e quindi i semipiani α e β individuati dall'asintoto, stabilite in quali semipiani si sviluppa la curva di equazione *y* = *f*(*x*).

Procedete analogamente per la funzione razionale $y = f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$.

8. Si verifichi se il teorema dei valori intermedi è applicabile o meno alla funzione
$y = f(x) = sen\, x + sgn(sen\, x),\ x \in [-\pi, \pi]$.

9. Disegnare il diagramma di $y = sen\ x \cdot sgn(\cos x)$

10. Calcolate $\lim_{x\to0^-} \frac{sen\,(1-\cos x)}{|x|}$.

11. Dimostrare per induzione che $D^n[x^n] = n!$

12. 5.5.6. $D\left[\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}\right]$.

5.5.8. $D\left[\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(x^2-1)\cdot e^x}\right]$.

5.5.7. $D\left[x\sqrt{x^2-1}\right]$.

5.5.9. $D\left[\frac{2^x \log\sqrt{x}}{\operatorname{senh} x\cdot\sqrt{x}}\right]$.

13. Ricordando l'espressione della derivata di *y* = tan *x* , calcolare $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Soluzioni

6. Vale la seguente relazione:

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}.$$

Dimostriamo la precedente formula, utilizzando la tangente della differenza tra archi:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\alpha-\beta = \arctan\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Ponendo $\begin{cases}\tan\alpha = x\\ \tan\beta = y\end{cases}$, da cui $\begin{cases}\alpha = \arctan x\\ \beta = \arctan y\end{cases}$ otteniamo:

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy}.$$

Calcoliamo ora il limite richiesto:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\frac{x+1}{x+2} - \arctan 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\frac{\frac{x+1}{x+2}-1}{1+\frac{x+1}{x+2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan\frac{-\frac{1}{x+2}}{\frac{2x+3}{x+2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x\cdot\arctan\frac{1}{2x+3}\right) = \left\{v = \frac{1}{2x+3}\right\} =$$

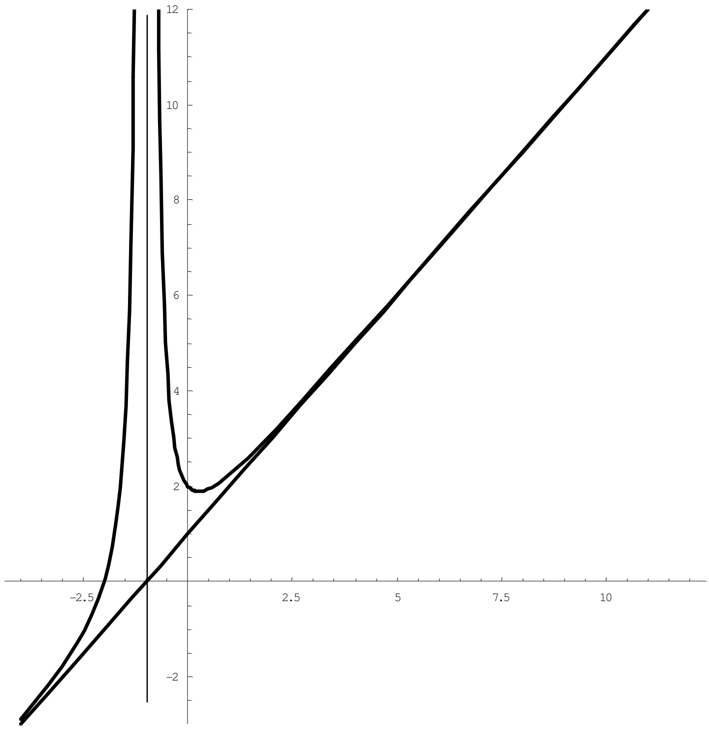
$$= -\lim_{v\to 0}\frac{\arctan v}{v}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+3} = -\frac{1}{2}.$$

7. La funzione è definita per $x < -1$ e per $x > -1$. Si esegua la divisione tra numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+3x+2 & x^2+2x+1 \\ \hline & x+1 \\ \quad R = 1 & \end{array}$$

Quindi

$$y = f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}.$$



La differenza tra l'ordinata della curva di equazione $y = f(x)$ e l'ordinata della retta a di equazione $y = x + 1$ tende a 0 per x che tende a infinito, dunque a è l'asintoto obliquo per la funzione assegnata. La differenza $f(x) - (x+1)$ è sempre positiva, quindi la curva si sviluppa al di sopra dell'asintoto.

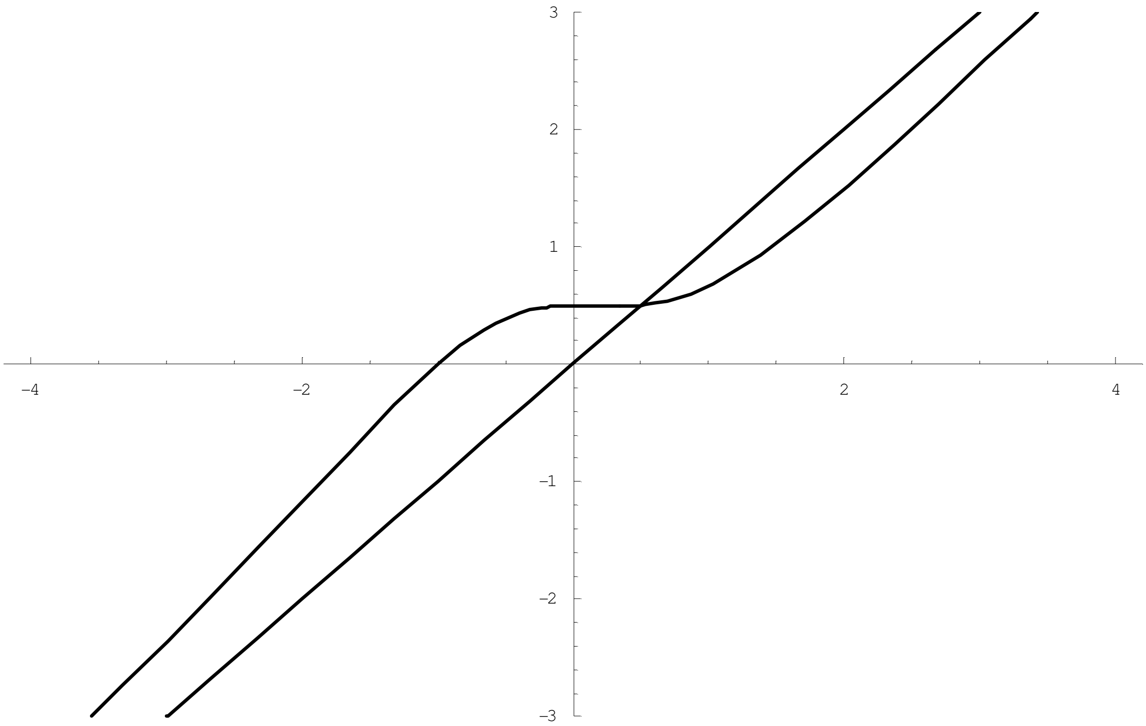
$y = f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$.

La differenza di grado tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore è pari a 1: la funzione ammette un asintoto obliquo, che determiniamo effettuando la divisione di x^3+1 per x^2+2.

$$y = f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2} = x + \frac{1-2x}{x^2+2}.$$

La funzione presenta l'asintoto obliquo di equazione $y = x$; la differenza $f(x) - x = \frac{1-2x}{x^2+2}$ è positiva se $x < ½$.

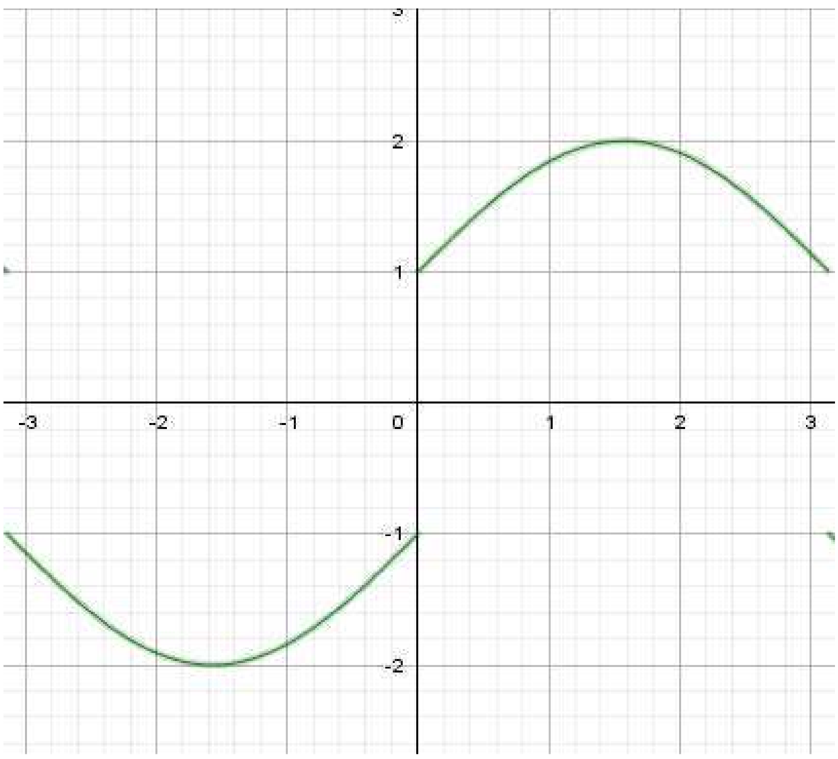
e negativa per x maggiore di ½; la curva attraversa l'asintoto in x = ½. Inoltre f(0) = ½.



8 -9. La funzione $y = f(x) = sen\, x + sgn(sen\, x),\ \ x \epsilon [-\pi, \pi]$ si può esprimere

come $y = f(x) = \begin{cases} sen\, x - 1, & -\pi \le x < 0 \\ sen\, x, & x = 0 \\ sen\, x + 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

poiché sia il limite destro che quello sinistro, per $x \to 0$ non coincidono con $f(0)$, la funzione non è continua nell'intervallo assegnato e non vale pertanto il teorema dei valori intemedi.



10 $\lim_{x\to 0^-}\frac{sen\,(1-\cos x)}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{sen\,(1-\cos x)}{-x}\times\frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{sen\,(1-\cos x)}{1-\cos x}\times \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x(1+\cos x)} =$

{v =1 − cos x, $v\to 0$ se $x\to 0$ }

$= \lim_{v\to 0}\frac{sen\ v}{v}\times \lim_{x\to 0^-}\frac{sen^2 x}{x}\times\frac{1}{2} = 1\ \times 0 = 0.$

11. L'enunciato è vero se n = 1: $D^1(x^1) = 1!$

Supponiamo che l'enunciato sia verificato per $n = k$.

$D^{k+1}(x^{k+1}) = D^k\,(D\,(x^{k+1})) = (k+1)\ D^k(x^k) = (k+1)\ k! = (k+1)\,!$ Dunque l'enunciato vale anche per $n = k + 1$.

13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}} = \{$ $h = x-\pi/4$, $h\to 0$ se $x\to\pi/4$}

$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{h}$, che coincide con la derivata della tangente in $\pi/4$. Sappiamo che la derivata della tangente è

$1+\tan^2 x$, che in $\pi/4$ vale 2.
]]

15. Dimostrare per induzione che (I) $D^n \left[\frac{1}{x}\right] = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$.

Ricordiamo che la derivata della potenza *n*-esima vale anche nel caso dell'esponente in **Z**.

Infatti, posto $f(x) = \frac{1}{x^n}$, si applica la derivata del reciproco di una funzione:

$D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g\prime(x)}{g^2(x)}$.

Da cui $D[x^{-n}] = D\left[\frac{1}{x^n}\right] = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-(n+1)}$.

Tornando alla dimostrazione della (I), si verifica che la (I) vale per $n = 1$:

$D^1\left[\frac{1}{x}\right] = (-1)^1\, 1!\, \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

Ipotesi induttiva. La formula vale per $n = k$: $D^k\left[\frac{1}{x}\right] = (-1)^k k!\ \ x^{-(k+1)}$.

Consideriamo la derivata di ordine $n = k + 1$:

$D^{k+1}\left[\frac{1}{x}\right] = D\left[D^k\left(\frac{1}{x}\right)\right] = D\{(-1)^k k!\ x^{-(k+1)}\} = (-1)^k k!\,(-1)(k+1)x^{-(k+2)} = (-1)^{k+1}(k+1)!\ x^{-(k+2)}$.

Q.E.D.

16). Se $f(x)$ è pari, $f'(x)$ è dispari e viceversa. Sia infatti f pari:

$f(-x) = f(x)$. Derivando i membri dell'uguaglianza, si ottiene

$-f'(-x) = f'(x)$, dunque f' è dispari.

Se f è dispari, $f(-x) = -f(x)$. Derivando: $-f'(-x) = -f'(x)$, dunque f' è pari.