Le funzioni iperboliche.

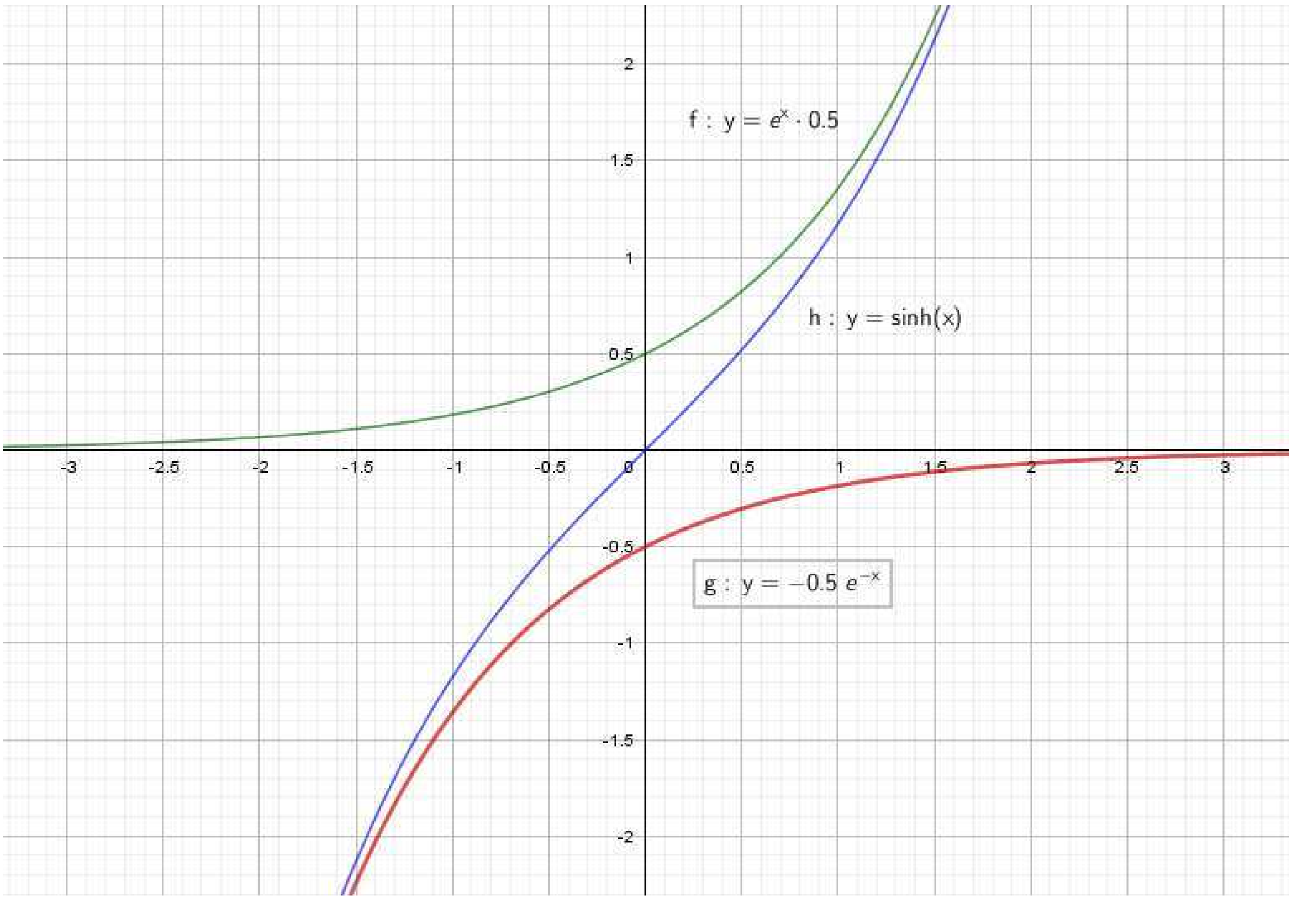
Definizoni e prime proprietà.

1) Si dice seno iperbolico la funzione $y = f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
E' subito visto che $f(0) = 0$ e che la funzione è dispari: $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$.
Per studiare l'andamento della funzione sinh x è sufficiente studiare la funzione per $x \geq 0$, essendo la funzione dispari.
Si considerino i grafici di $\frac{1}{2} e^x$ e $-\frac{1}{2} e^{-x}$: le ordinate della curva di equazione $y = \sinh x$ si ottengono sommando quelle di $\frac{1}{2} e^x$ a quelle di $-\frac{1}{2} e^{-x}$. Se $x \geq 0$, $e^x \geq e^{-x}$, $f(x) \geq 0$. La funzione seno iperbolico è crescente sul semiasse positivo, avvicinadosi indefinitamente a $\frac{1}{2} e^x$, perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} e^{-x} = 0$.
La funzione seno iperbolico è crescente su tutto **R.**
La monotonia della funzione è sufficiente ad assicurarne l'invertibilità. Ragionando sulla definizione $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, si ottiene: $e^x - 2y - e^{-x} = 0$, $e^{2x} - 2y\, e^x - 1 = 0$,

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Si scarta il valore negativo della radice perché e^x è positivo.
Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri dell'uguaglianza e scambiando la y con la x, otteniamo l'espressione della funzione inversa di sinh x.

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

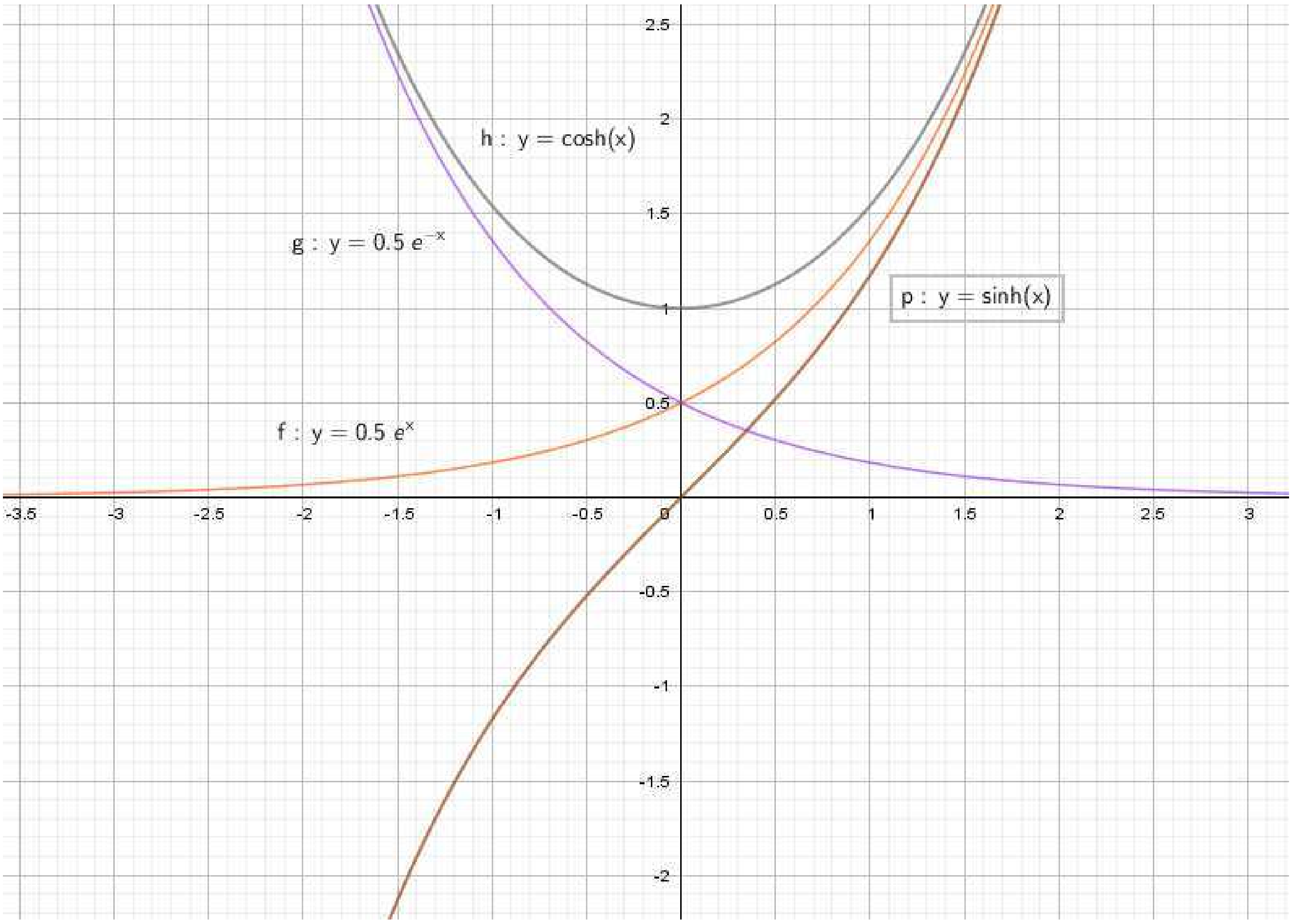


Verifichiamo che $\sinh^{-1} x$ è dispari:
$f(-x) = \log\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \log\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = -\log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -f(x)$.

2) Si dice <u>coseno iperbolico</u> di *x* la funzione

$$y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Dalla definizione, risulta cosh *x* > sinh *x*. (infatti $e^x > -e^{-x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$). Questa è una funzione pari su **R**, e come tale non è invertibile su **R** .



Poiché cosh (*x*) è però crescente su $\mathbf{R}_+$, la funzione è invertibile su $\mathbf{R}_+$.

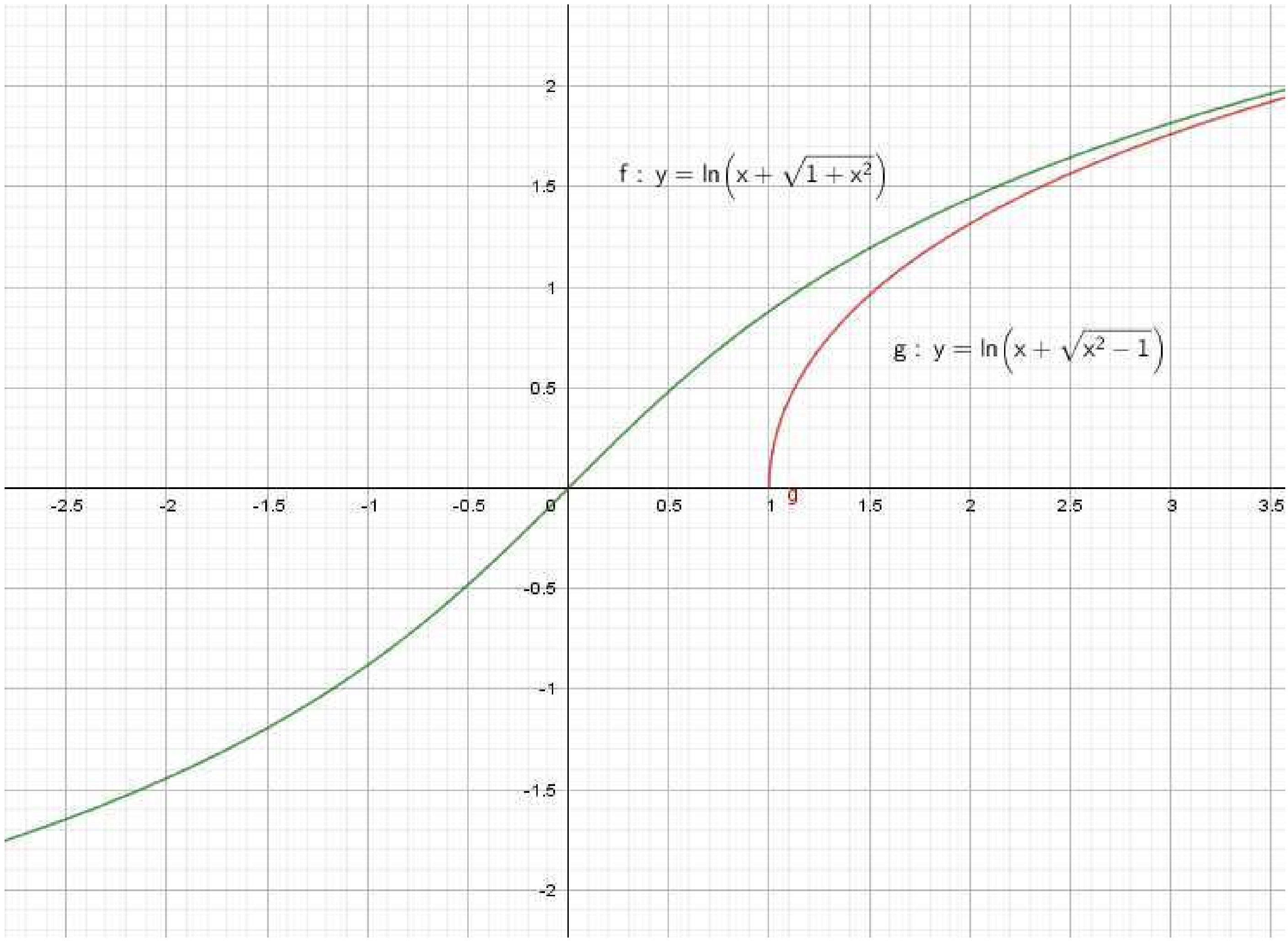
Il coseno iperbolico di 0 vale 1. Ricaviamo per $x \geq 0$ la funzione inversa, $\cosh^{-1}$. Dalla definizione,

$e^x + e^{-x} - 2y = 0$, $e^{2x} - 2\,y\,e^x + 1 = 0$. Da cui

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Considerando il logaritmo di entrambi i menbri e scambiando la x con la *y*, si ottiene

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 0.$$



3) Si definisce <u>tangente iperbolica</u> la funzione $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

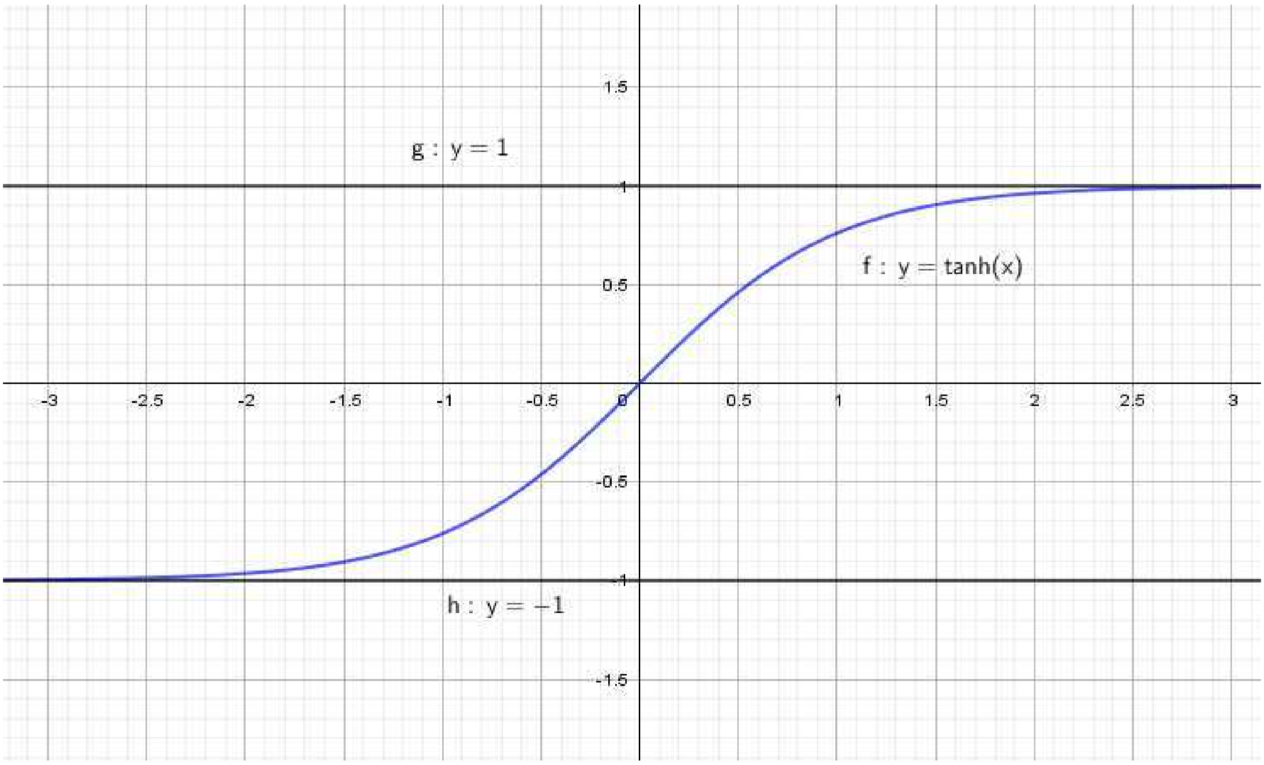
Questa è una funzione dispari, essendo il quoziente tra una funzione dispari e una funzione pari.
Vale 0 in $x = 0$.
Risulta

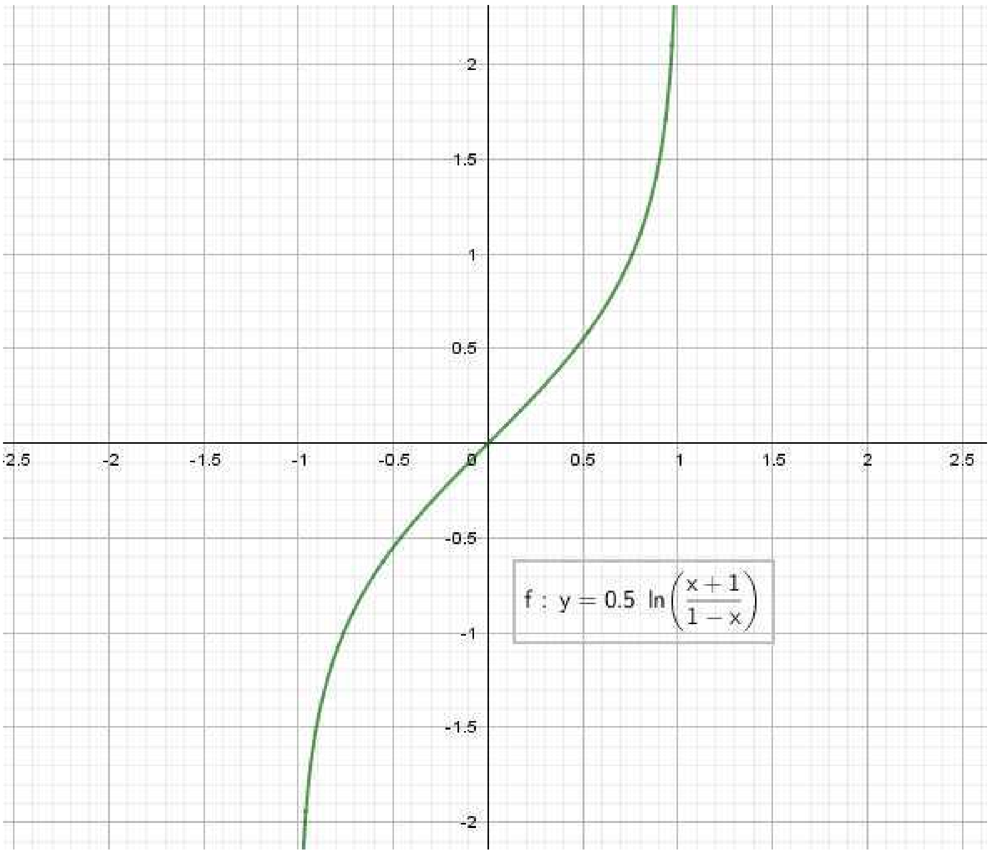
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1.$$

Si verifica che, per $0 < x_1 < x_2$, risulta $\tanh x_1 < \tanh x_2$.
Infatti $\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} < \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}}$ equivale a $e^{x_1 - x_2} < e^{x_2 - x_1}$, soddisfatta se $0 < x_1 < x_2$. La funzione è pertanto crescente su **R.**
Ricaviamo la funzione inversa:

$ye^x + ye^{-x} - e^x + e^{-x} = 0,\ (y-1)e^{2x} + y + 1 = 0,$

$e^x = \sqrt{\frac{y+1}{1-y}},\ \ x = \log\sqrt{\frac{y+1}{1-y}},$ ovvero $y = tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{1-x},\ -1 < x < +1.$





4) Poiché

$\cosh^2 x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$, $\sinh^2 x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

5) Siano x e y due qualsiasi numeri reali. Procedendo per analogia con le funzioni goniometriche, si considerino

$$\sinh x \cosh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

e

$$\cosh x \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

Sommiamo membro a membro, ottenendo

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{2e^{x+y} - 2\, e^{-x-y}}{4} = \sinh(x+y).$$

Ricordando che sinh è dispari, da

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

otteniamo

$$\sinh(x-y) = \sinh(x + (-y)) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y.$$

Analogamente:

$$\cosh x \cosh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$
$$\sinh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

Sommando membro membro:

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \cosh(x+y)$$

6) Dalle formule per la somma:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh x + \sinh y \sinh y,$$

si ricavano quelle di duplicazione:

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh y,$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 y.$$

7) Per quanto riguarda le derivate, è immediato che

D sinh x = cosh x,

D cosh x = sinh x.

D tanh x = $D\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{cosh^2 x - sinh^2 x}{\cosh x^2} = \frac{1}{\cosh x^2}$.

Consideriamo infine le derivate delle funzioni inverse.
Richiamiamo il teorema sulla derivata della funzione inversa: sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, continua e strettamente monotona. Se f è derivabile in x_0 interno ad (a, b) e $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $x = g(y) = f^{-1}(y)$ = è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale la formula $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

1) Risulta dunque

$$D(sinh^{-1}(y)) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

ricordando che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e che $y = \sinh x$.

2) $$D\big(cosh^{-1}(y)\big) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}},\ y \neq 1$$

3) $$D(tanh^{-1}(y) = cosh^2 x = \frac{cosh^2 x}{cosh^2 x - sinh^2 x} = \frac{1}{1-y^2}\ .$$

Applicazioni.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + \log(1+x)^2 - 2}{2x}$ =

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x}$.

d) $L = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

e) Calcolate la derivata di 5.7.5. $\frac{1+|x|}{2+x},\ x \neq -2.$

Soluzioni.

a) Si riconosce nel limite proposto il limite di un rapporto incrementale:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - 0}{x} \ = \ D(\sinh x)_{x=0} = \cosh 0 = 1$.

b) Analogamente al caso precedente:

$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1 + \log(1+x)\right)\right] \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1\right) + \ \lim \ \ _{x\to 0} \frac{1}{x} \log(1+x)$=

= D(cosh(x))$_{x=0}$ + log e = sinh(0) +1 =1

c) $D(senh^{-1}(x))_{x=0} \ = \ \frac{1}{\cosh 0} = 1$

d) Il limite proposto coincide con la derivata della funzione $f(x) = a^x$ nel punto $x_0 = 0$. Dal momento che la derivata di $f(x) = a^x = e^{\log a \cdot x}$ è uguale a log $a \cdot a^x$, L = log a.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2+x}, \ x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \\ \dfrac{1+x}{2+x}, \ x \geq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(2+x)-(1-x)}{(2+x)^2} = \dfrac{-3}{(2+x)^2}, \ x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \\ \dfrac{2+x-(1+x)}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{(2+x)^2}, \ x \geq 0 \end{cases}$$

f) Applicare la regola di L'Hopital nel seguente esercizio:

sia $L(b) = \lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - b\ arctan\ \ 3x + 2x}{\log(1+x^3)}$. Determinare per quale valore del parametro ***b*** l'argomento del limite converge e determinate il valore di L(***b***).

g) Studiare la funzione $f(x) = \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$.

h) Stabilire se la seguente equazione ha soluzione. Nel caso esistano più soluzioni determinatene il numero.

$x\, e \quad + x\, e^{-x} - 2 = 0.$