

Programma di Analisi Matematica I

L'insieme \mathbf{N} e \mathbf{Z} . Principio di induzione. L'insieme \mathbf{Q} e relativa assiomatica. Definizione di numero irrazionale. L'insieme \mathbf{R} e relativi sottoinsiemi. Intervalli. Maggiorante e minorante di un sottoinsieme. Sottoinsieme limitato (superiormente ed inferiormente). Massimo e minimo assoluti, estremo superiore ed inferiore di un sottoinsieme. Assioma della completezza. Intorno sferico di un punto. Intorno sferico bucato. Intorno destro e sinistro di un punto. Punto di accumulazione di un sottoinsieme. Punto isolato di un sottoinsieme.

Funzione reale di una variabile reale. Immagine e controimmagine di un numero mediante la funzione. Funzione suriettiva, iniettiva e biiettiva. Invertibilità di una funzione e funzione inversa. Grafico di una funzione ed eventualmente della rispettiva funzione inversa. Funzione pari e dispari. Monotonìa delle funzioni. Invertibilità delle funzioni strettamente monotone. Funzioni limitate (superiormente e inferiormente); maggiorante, minorante, massimo e minimo assoluti, estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione. Le funzioni elementari: successione numerica, funzione costante, potenze ad esponente naturale, radici n-esime, polinomi, potenze ad esponente intero negativo, razionale e reale, valore assoluto, esponenziale, logaritmo, funzioni goniometriche e relative inverse. Funzioni composte.

Introduzione al concetto di limite di una funzione in un punto e all'infinito. Funzioni regolari (convergenti e divergenti) e irregolari per $x \rightarrow \lambda$. Definizione di funzione convergente e divergente per $x \rightarrow \lambda$. Definizione di limite destro e sinistro. Teorema dell'unicità del limite. Teorema del confronto del

limite. Limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Studio del comportamento delle funzioni elementari agli estremi del

loro dominio. Limite di una funzione composta. Limite di una combinazione lineare, del prodotto, del rapporto di due funzioni. Limite di una funzione nella forma $f(x)^{g(x)}$. Forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$,

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , ∞^0 e 0^0 . Limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Continuità in un punto e un insieme di una funzione. Classificazione delle discontinuità. Continuità a destra e a sinistra. Continuità delle funzioni elementari nel loro dominio. Continuità di una funzione composta. Continuità della somma, prodotto e rapporto di funzioni continue. Continuità delle funzioni nella forma $f(x)^{g(x)}$ dove f e g sono continue. Teorema della permanenza del segno. Teorema dei valori intermedi. Teorema di esistenza degli zeri. Teorema di Weierstrass.

Derivabilità in un punto e in un insieme di una funzione. Definizione di derivata prima in un punto e in un insieme di una funzione. Derivabilità a destra e a sinistra. Derivate successive. Interpretazione geometrica della derivata in un punto, retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Derivabilità delle funzioni elementari nel loro dominio. Teorema sulla derivabilità di una funzione composta. Teorema sulla derivabilità di una combinazione lineare, prodotto e rapporto di funzioni. Teorema sulla derivabilità di una funzione inversa. Derivabilità e continuità di una funzione in un punto. Estremi relativi di una funzione (max e min relativi). Teorema di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Teorema di De l'Hospital. Criterio per stabilire la derivabilità in un punto di continuità di una funzione. Classificazione dei punti di non derivabilità: punti angolosi, di cuspide e di flesso a tangente verticale. Teorema sulle funzioni a derivata nulla in un intervallo. Teorema sulla monotonia stretta di una funzione in un intervallo in base al segno della derivata prima. Ricerca degli estremi relativi di una funzione. Concavità e convessità di una funzione in un intervallo. Punti di flesso. Teorema sulla concavità e convessità di una funzione in un intervallo in base al segno della derivata seconda. Ricerca dei punti di flesso. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Studio del grafico di una funzione.

Definizione di integrale definito di una funzione continua. Sua interpretazione geometrica. Teorema della linearità. Teorema della additività. Teorema del confronto. Teorema del modulo. Teorema della media. Teorema della media pesata. Il teorema fondamentale del calcolo integrale. Definizione di funzione primitiva di una funzione e relative proprietà. Il teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrali

indefiniti. Integrali immediati. Funzioni iperboliche e rispettive inverse. Metodo di integrazione per sostituzione. Metodo di integrazione per parti. Integrazione delle funzioni razionali.

Definizione di serie numerica. Serie convergente, divergente e irregolare. Serie telescopica e serie geometrica. Comportamento delle successioni monotone (limitate e non). Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni e le serie numeriche. Condizione necessaria di convergenza di una serie. Serie armonica. Proprietà di linearità di due serie convergenti. Criteri di convergenza per serie numeriche a termini di segno costante: criterio del confronto, criterio della radice, criterio del rapporto, criterio dell'integrale, criterio del confronto asintotico. Serie armonica generalizzata. Serie a termini di segno alterno. Criterio di convergenza di Leibniz. Serie numeriche assolutamente convergenti. Convergenza delle serie dalla assoluta convergenza.

Polinomio di Taylor di grado n di una funzione con punto iniziale x_0 . Polinomi di MacLaurin delle funzioni elementari. Formula di Taylor di ordine n . Rappresentazione di Lagrange del resto nella formula di Taylor. Applicazioni della formula di Taylor nei problemi di approssimazione. Simbolo di Landau o e sue proprietà operative. Rappresentazione del resto col simbolo di Landau o . Applicazioni della formula di Taylor nei problemi di calcolo di un limite.

Definizione di numero complesso. Somma e prodotto tra numeri complessi. Parte reale e immaginaria. Rappresentazione geometrica di un numero complesso. Modulo, coniugato, argomento principale. Costante immaginaria. Rappresentazione $z = x + i y$. Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso. Calcolo dell'argomento principale in funzione della parte reale e immaginaria. Rapporto tra numeri complessi. Esponenziale nel campo complesso. Formula di Eulero. Rappresentazione esponenziale di un numero complesso. Potenza di un numero complesso. Radice n -esima di un numero complesso. Equazioni e disequazioni nel campo complesso.