Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

(Prof. Pierpaolo Natalini)

Roberta Bianchini

6 novembre 2016

FOGLIO 1

1. Determinare il dominio e il segno della funzione
$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) - \pi/3.$$

2. Dimostrare, mediante la definizione di limite, che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x} = -\infty.$$

3. Sia $A = \left\{x \in \mathbb{R}/\ x = \frac{3n-|\sin n|}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. Studiare la limitatezza di A. Determinare gli eventuali $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$. Giustificare le risposte utilizzando le definizioni.

4. Verificare l'invertibilità della funzione $y = f(x) = e^x + arctan(x)$. Calcolare $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(e+\frac{\pi}{4})$.

5. Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_n = n^2 - n$. Studiare la limitatezza di $\{a_n\}$. Determinare gli eventuali $\sup a_n$, $\inf a_n$, $\max a_n$, $\min a_n$. Giustificare le risposte utilizzando le definizioni.

SVOLGIMENTO

1. Prima di tutto dobbiamo chiedere che l'argomento della radice quadrata non sia negativo e l'argomento della funzione arccos sia compreso tra -1 e 1. Questo vuol dire intersecare l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2-1 \geq 0$ con quello delle soluzioni delle due disequazioni $-1 \leq \sqrt{x^2-1}-x+1 \leq 1$ (è equivalente studiare $|\sqrt{x^2-1}-x+1| \leq 1$).

   In particolare $x^2-1 \geq 0$ ha come insieme delle soluzioni l'insieme
$$S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$
   Mentre per trovare le soluzioni di
$$-1 \leq \sqrt{x^2-1} - x + 1 \leq 1$$
   bisogna studiare due equazioni irrazionali e intersecare le loro soluzioni. Le due disequazioni sono
$$\sqrt{x^2-1} \leq x$$
   e
$$\sqrt{x^2-1} \geq x-2$$
   La prima disequazione è equivalente al seguente sistema
$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2-1 \leq x^2 \end{cases}$$
   che ha come insieme delle soluzioni l'intersezione
$$S_1 \cap [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [1, +\infty).$$
   Allo stesso modo, la seconda disequazione ha come soluzioni l'unione delle soluzioni dei seguenti due sistemi
$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq x^2-4x+4, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x-2 < 0, \end{cases}$$

dove il primo ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap [2, +\infty) \cap [5/4, +\infty) = [2, +\infty),$$

mentre il secondo ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -1] \cup [1, 2).$$

L'unione dell'insieme delle soluzioni dei due sistemi è quindi S_1.

Intersecando gli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni troviamo che il dominio della funzione $f(x)$ è la semiretta $[1, \infty)$.

Studiamo ora il segno della funzione $f(x)$. Studiamo quindi prima la disequazione $f(x) > 0$, poi l'equazione $f(x) = 0$ e, ad esclusione, troveremo anche le x per cui $f(x) < 0$.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) - \pi/3 > 0$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) > \pi/3$$

ed, dato che $1/2 = \cos(\pi/3)$, si ha

$$\sqrt{x^2-1} - x + 1 < 1/2$$

(si inverte il segno della disequazione perché la funzione $\arccos(x)$ è strettamente decrescente).,

Dobbiamo risolvere la seguente disequazione irrazionale

$$2\sqrt{x^2-1} < 2x - 1,$$

che è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 4x^2 - 4 < 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$S_1 \cap (1/2, +\infty) \cap (-\infty, 5/4) = [1, 5/4).$$

Quindi la funzione $f(x)$ è positiva per $x \in [1, 5/4)$. Studiamo ora dove la funzione si annulla, cioè dove

$$\arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) - \pi/3 = 0$$

con lo stesso ragionamento fatto per la disequazione, questa equivale a

$$\sqrt{x^2-1} - x + 1 = 1/2$$

che è verificata per $x = 5/4$.

Possiamo concludere che

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ se} & x \in [1, 5/4) \\ f(x) = 0 \text{ se} & x = 5/4 \\ f(x) < 0 \text{ se} & x \in (5/4, +\infty) \end{cases}$$

2. A partire dalla definizione dobbiamo dimostrare che

$$\forall k > 0, \exists \delta_k > 0 : \forall x > \delta_k, \frac{x^3}{1-x} < -k$$

Nei casi più semplici la strategia è quella di cercare di risolvere la disequazione $\frac{x^3}{1-x} < -k$ e controllare se nell'insieme delle soluzioni c'è un sottoinsieme del tipo $\{x > \delta_k\}$. Tuttavia ci sono casi in cui le disequazioni con cui abbiamo a che fare non sono di semplice soluzione. E questo esercizio ne è un esempio.

Notiamo innanzitutto che, volendo studiare il comportamento della frazione per x che tende a $+\infty$, possiamo assumere il denominatore negativo, in quanto stiamo trattando valori di x molto maggiori di 1. Dunque possiamo riportare la nostra analisi allo studio della disequazione $x^3 - kx + k > 0$ che è equivalente a $\frac{x^3}{1-x} < -k$ sotto l'assunzione $1 - x < 0$ (è stato portato il $-k$ a sinistra ed è stato fatto il minimo comune multiplo).

Tuttavia anche $x^3 - kx + k > 0$ è una disequazione che non è immediato risolvere. Conviene considerare una funzione ausiliaria $g(x) = x^3 - kx$, che minora la funzione $x^3 - kx + k$ e si ottiene da essa eliminando la costante $k > 0$. Dunque

$$x^3 - kx + k > x^3 - kx > 0$$

Ora $x^3 - kx > 0$ è di facile soluzione. Infatti si riduce a

$$x(x^2 - k) > 0$$

e, poiché stiamo trattando valori di x grandi e positivi, possiamo direttamente studiare

$$(x^2 - k) > 0$$

che ha, come insieme di soluzioni positive $\mathcal{S}' = (\sqrt{k}, +\infty)$.

Ora è importante notare che se abbiamo una relazione d'ordine del tipo $f(x) > g(x) > 0$ e indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > 0$ e con $\mathcal{S}'$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $g(x) > 0$, allora $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$. Infatti se $\bar{x}$ è un punto fissato tale che $\bar{x} \in \mathcal{S}'$ allora, per definizione di $\mathcal{S}'$, $g(\bar{x}) > 0$; ma allora $f(\bar{x}) > 0$ (perché $f(x) > g(x)$), dunque $\bar{x} \in \mathcal{S}$; quindi $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$.

Dunque, tornando all'esercizio, $\mathcal{S}' = (\sqrt{k}, +\infty) \subseteq \mathcal{S}$ e di conseguenza possiamo prendere $\delta_k = \sqrt{k}$.

3. Conviene scrivere il generico elemento di A nel seguente modo

$$x = \frac{3n - |\sin n|}{n} = 3 - \frac{|\sin n|}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < |\sin n| < 1$, si ha

$$2 < 3 - \frac{|\sin n|}{n} < 3, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

da cui segue la limitatezza di A. Dimostriamo che $3 = \sup A$. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, 3 - \frac{|\sin n|}{n} > 3 - \varepsilon,$$

cioé che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, \frac{|\sin n|}{n} < \varepsilon.$$

In altri termini occorre far vedere che l'insieme S_1 delle soluzioni della disequzione $\dfrac{|\sin n|}{n} < \varepsilon$ contiene almeno un numero naturale qualunque sia il numero $\varepsilon > 0$ fissato. Non essendo in grado di determinare S_1, sfruttiamo la maggiorazione

$$\frac{|\sin n|}{n} < \frac{1}{n}, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

e determiniamo l'insieme S_2 delle soluzioni della disequzione $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Si ottiene

$$S_2 = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) \cap \mathbb{N},$$

che é non vuoto per l'illimitatezza $\mathbb{N}$ di in $\mathbb{R}$. In conclusione basta far vedere che $S_2 \subset S_1$, in modo tale che

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \Rightarrow S_1 \cap \mathbb{N} \neq \emptyset.$$

Sia $\bar{n} \in S_2$. Allora si ha

$$\frac{|\sin \bar{n}|}{\bar{n}} < \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon,$$

da cui segue $\bar{n} \in S_1$ cioè la tesi. L'insieme A non è dotato di massimo assoluto.

Dimostriamo ora che il numero $3 - sin(1) \approx 3 - 0.0174 = 2.9826$ é il minimo assuluto di A. Ciò si può intuire dal fatto che la sequenza $\dfrac{|sinn|}{n}$ tende a 0 al tendere di n a ∞. Ovviamente $3 - sin(1) \in A$, quindi basta far vedere che $3 - sin(1)$ é un minorante di A. Tenuto conto che $sin(1) \approx 0.0174 > 0.017$, si ottiene che

$$\frac{1}{n} < 0.017 \quad \to \quad n > \frac{1}{0.017} \approx 58.8 > 58,$$

quindi se $n > 58$ si ha

$$\frac{|\sin n|}{n} < \frac{1}{n} < \sin(1),$$

ovvero

$$3 - \frac{|\sin n|}{n} > 3 - \frac{1}{n} > 3 - \sin(1).$$

Dal confronto diretto tra i numeri $3 - \frac{|\sin n|}{n}$, con n intero da 1 a 57, si determina il valore minimo per $n = 1$.

4. Entrambe le funzioni considerate in $f(x)$, e^x e $arctan(x)$, sono monotòne crescenti su tutto l'asse reale. Dato che la somma di funzioni crescenti è ancora una funzione crescente, $y = f(x) = e^x + arctan(x)$ è una funzione invertibile su tutto $\mathbb{R}$.
Ora, determinare il valore di $f^{-1}(1)$ significa trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^x + arctan(x) = 1.$$

Si nota immediatamente che l'equazione risulta valida per $x = 0$, quindi $f^{-1}(1) = 0$. Analogamente, si chiede di trovare $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^x + arctan(x) = e + \frac{\pi}{4}.$$

In questo caso la x cercata è 1, cioè $f^{-1}(e + \frac{\pi}{4}) = 1$.

5. Dimostriamo dapprima che la successione è strettamente crescente, cioè che
$$a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dalla relazione
$$n^2 - n < (n+1)^2 - (n+1)$$
risulta
$$n^2 - n < n^2 + 2n + 1 - n - 1 \Rightarrow 0 < 2n,$$
che è soddisfatta $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi si ha che $0 = \min a_n$.

Dimostriamo ora che la successione è illimitata superiormente. Dobbiamo far vedere che
$$\forall K > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \, / \, n^2 - n > K,$$
che equivale a dire che non esiste un minorante per la successione. L'insieme delle soluzioni della disequazione $n^2 - n > K$, dove la costante K deve essere interpretata come numero molto grande, è
$$S = \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1+4K}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{1+4K}}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{N}$$
$$= \left(\frac{1 + \sqrt{1+4K}}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{N},$$
che è non vuoto per l'illimitatezza $\mathbb{N}$ di in $\mathbb{R}$. Da ciò segue la tesi.