Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

(Prof. Pierpaolo Natalini)

Roberta Bianchini

9 dicembre 2016

FOGLIO 2

1. Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x-3|} - x.$$

   Determinare, inoltre, tutti gli estremi relativi di f.

2. Stabilire per quali valori dei parametri reali α e β risulti continua e derivabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ln(x^2 + x + 1) + \alpha & x \geq 0, \\ sin(2\beta x) & x < 0. \end{cases}$$

   Per tali valori di α e β determinare il più ampio intervallo contenente l'origine in cui f risulti invertibile.

3. Verificare l'invertibilità della funzione

$$f(x) = sin(\frac{\pi}{2} cos(x))$$

   nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$. Determinare dominio e codominio dell'inversa della funzione f così ristretta e calcolare $\frac{df^{-1}}{dy}(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. Studiare, al variare del parametro reale α, il comportamento della successione

$$a_n = \frac{(1-\alpha)^n}{n}$$

   per $n \to +\infty$.

5. Dimostrare o confutare la seguente affermazione: sia f una funzione derivabile in un insieme A e sia $f'(x) > 0$ in tutti i punti di A. Allora f è strettamente crescente in A.

SVOLGIMENTO

1. L'argomento della radice quadrata $|x-3| \geq 0$ per definizione della funzione modulo, quindi $f(x) = \sqrt{|x-3|} - x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Esplicitamente

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} - x & x \geq 3, \\ \sqrt{-x+3} - x & x < 3. \end{cases}$$

La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - 1 & x > 3, \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} - 1 & x < 3. \end{cases}$$

Si nota che la funzione f è derivabile per $x < 3$ e per $x > 3$. Resta da verificare la derivabilità nel punto $x = 3$. Ora,

$$lim_{x\to 3^+} f(x) = lim_{x\to 3^+} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - 1 = +\infty,$$

mentre

$$lim_{x\to 3^-} f(x) = lim_{x\to 3^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} - 1 = -\infty.$$

Quindi $x = 3$ è un punto di cuspide, cioè un punto di non derivabilità della funzione f e l'insieme di derivabilità di f è $\mathbb{R} - \{3\}$.
Studiamo il segno della derivata prima di $f(x)$. Per $x > 3$, il denominatore è $2\sqrt{x-3} > 0$, quindi resta da studiare il numeratore

$$1 - 2\sqrt{x-3} \geq 0 \to \sqrt{x-3} \leq \frac{1}{2} \to x \leq \frac{13}{4}.$$

Quindi la derivata prima (nel caso $x > 3$) è positiva per $x < \frac{13}{4}$, si annulla in $\frac{13}{4}$ ed è negativa per $x > \frac{13}{4}$, cioè $x = \frac{13}{4}$ è un punto di massimo locale.
Per $x < 3$, dobbiamo studiare la disequazione

$$-1 - 2\sqrt{-x+3} \geq 0 \to \sqrt{-x+3} \leq -\frac{1}{2}$$

e quest'ultima disequazione non è mai verificata, data la positività della radice quadrata, quindi $f'(x) < 0$ per $x < 3$.
Infine,

$$lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} - x = lim_{x\to+\infty} \frac{x-3-x^2}{\sqrt{x-3}+x}$$

$$= lim_{x\to+\infty}\frac{x(-1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x})}{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}} = -\infty,$$

e

$$lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x+3}-x = lim_{x\to-\infty}\frac{-x+3-x^2}{\sqrt{-x+3}+x}$$

$$= lim_{x\to-\infty}\frac{x(-1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x})}{1+\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = +\infty,$$

quindi non ci sono punti di massimo e minimo assoluti.

2. Per avere continuità in $x = 0$, determiniamo α e β tali che

$$lim_{x\to0^+}ln(x^2+x+1)+\alpha = lim_{x\to0^-}sen(2\beta x) \to ln(1)+\alpha = 0 \to \alpha = 0.$$

Quindi per $\alpha = 0$ e β qualsiasi la funzione è continua. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+x+1}, & x > 0, \\ 2\beta cos(2\beta x), & x < 0. \end{cases}$$

Per avere derivabilità in $x = 0$, determiniamo β tale che

$$lim_{x\to0^+}\frac{2x+1}{x^2+x+1} = lim_{\to0^-}2\beta cos(2\beta x) \to 1 = 2\beta \to \beta = \frac{1}{2}.$$

Per $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$, $f(x)$ è continua e derivabile su $\mathbb{R}$, quindi

$$f(x) = \begin{cases} ln(x^2+x+1), & x \geq 0, \\ sin(x), & x < 0. \end{cases}$$

Ora, per $x > 0$ la funzione $ln(x^2 + x + 1)$ è strettamente crescente, mentre per $x < 0$ la funzione $sin(x)$ è invertibile in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, quindi il massimo intervallo di invertibilità della funzione f che comprenda l'origine è $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.

3. Calcoliamo

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}cos(x))sin(x)$$

e studiamone il segno in $(0, \frac{\pi}{2})$. Prima di tutto,

$$cos(\frac{\pi}{2}cos(x)) \geq 0 \to cos(\frac{\pi}{2}cos(x)) \geq \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}cos(x) \leq \frac{\pi}{2} \to cos(x) \leq 1$$

è sempre verificata in $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. D'altra parte,

$$-\frac{\pi}{2} sin(x)$$

è sempre negativo in $(0, \frac{\pi}{2})$, quindi $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e dunque f è invertibile in $(0, \frac{\pi}{2})$. Il dominio di f^{-1} è $(0, 1)$ e il codominio è $(0, \frac{\pi}{2})$.
Ora,

$$\frac{df^{-}1}{dy}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

con

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = y_0 = sin(\frac{\pi}{2} cos(x_0)) \to \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} cos(x_0) \to cos(x_0) = \frac{1}{2} \to x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Quindi

$$\frac{df^{-}1}{dy}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} sin(\frac{\pi}{3}) cos(\frac{\pi}{2} cos(\frac{\pi}{3}))} = \frac{-8}{\pi\sqrt{6}}.$$

4. Ragioniamo per casi. Quando

$$|1-\alpha| \leq 1 \to \begin{cases} 1-\alpha \geq 0 \\ 1-\alpha \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-\alpha \leq 0 \\ -1+\alpha \leq 1 \end{cases} \to \alpha \in [0, 2],$$

la successione è maggiorata da $\frac{1}{n}$, che tende a 0 per $n \to +\infty$, quindi, in questo caso, anche $a_n = \frac{(1-\alpha)^n}{n}$ con $|1-\alpha| \leq 1$, cioè per $\alpha \in [0, 2]$, tende a 0 per $n \to +\infty$. Per

$$1-\alpha > 1 \to \alpha < 0,$$

la successione $a_n = \frac{a^n}{n}$, con $a = 1-\alpha$ costante positiva e maggiore di 1, quindi, in questo caso, la successione diverge a $+\infty$.
Nel caso

$$1-\alpha < -1 \to \alpha > 2,$$

la successione $a_n = \frac{a^n}{n}$ con base a negativa e con modulo maggiore di 1, quindi la successione non ammette limite per $n \to +\infty$.

5. L'affermazione è falsa (attenzione alle ipotesi sull'insieme A...non ci sono!), per dimostrarlo basta esibire un controesempio:

$$f(x) = sin(x) \quad \text{per} \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (2\pi, \frac{5\pi}{2}).$$