

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

(Prof. Pierpaolo Natalini)

Roberta Bianchini

1 dicembre 2017

FOGLIO 2

1. Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = |x + 1| - 4|x^3|.$$

Determinare, inoltre, tutti gli estremi relativi di f .

2. Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x - 3|} - x.$$

Determinare, inoltre, tutti gli estremi relativi di f .

3. Stabilire per quali valori dei parametri reali α e β risulti continua e derivabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) + \alpha & x \geq 0, \\ \sin(2\beta x) & x < 0. \end{cases}$$

Per tali valori di α e β determinare il più ampio intervallo contenente l'origine in cui f risulti invertibile.

4. Verificare l'invertibilità della funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)$$

nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$. Determinare dominio e codominio dell'inversa della funzione f così ristretta e calcolare $\frac{df^{-1}}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

SVOLGIMENTO

1. Il dominio di f è chiaramente tutto \mathbb{R} . Inoltre f è una funzione continua su \mathbb{R} perché composizione di funzioni continue. Esplicitando i moduli che compaiono nell'espressione, possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 - x - 1 & \text{se } x < -1 \\ 4x^3 + x + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -4x^3 + x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre, $\forall x \neq -1, 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 - 1 & \text{se } x < -1 \\ 12x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -12x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Poiché f è una funzione continua, per verificare se è derivabile nei punti -1 e 0 , possiamo fare il limite da destra e da sinistra della derivata nei due punti e verificare che coincidono e sono uguali a un numero finito. In particolare

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 11 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 13$$

Dunque in -1 la funzione non è derivabile, e -1 è un punto angoloso, mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

Dunque nel punto 0 la funzione è derivabile e la sua derivata vale 1 . Possiamo concludere che $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dallo studio della derivata prima possiamo dire che f' è positiva prima di $\sqrt{\frac{1}{12}}$ e negativa dopo, nel punto $\sqrt{\frac{1}{12}}$ si annulla. Dunque $\sqrt{\frac{1}{12}}$ è un punto di massimo assoluto e

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{12}} + 1$$

Non c'è un punto di minimo assoluto perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

2. L'argomento della radice quadrata $|x - 3| \geq 0$ per definizione della funzione modulo, quindi $f(x) = \sqrt{|x - 3|} - x$ è continua su tutto \mathbb{R} . Esplicitamente

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3} - x & x \geq 3, \\ \sqrt{-x + 3} - x & x < 3. \end{cases}$$

La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - 1 & x > 3, \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} - 1 & x < 3. \end{cases}$$

Si nota che la funzione f è derivabile per $x < 3$ e per $x > 3$. Resta da verificare la derivabilità nel punto $x = 3$. Ora,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - 1 = +\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} - 1 = -\infty.$$

Quindi $x = 3$ è un punto di cuspide, cioè un punto di non derivabilità della funzione f e l'insieme di derivabilità di f è $\mathbb{R} - \{3\}$.

Studiamo il segno della derivata prima di $f(x)$. Per $x > 3$, il denominatore è $2\sqrt{x-3} > 0$, quindi resta da studiare il numeratore

$$1 - 2\sqrt{x-3} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x-3} \leq \frac{1}{2} \rightarrow x \leq \frac{13}{4}.$$

Quindi la derivata prima (nel caso $x > 3$) è positiva per $x < \frac{13}{4}$, si annulla in $\frac{13}{4}$ ed è negativa per $x > \frac{13}{4}$, cioè $x = \frac{13}{4}$ è un punto di massimo locale.

Per $x < 3$, dobbiamo studiare la disequazione

$$-1 - 2\sqrt{-x+3} \geq 0 \rightarrow \sqrt{-x+3} \leq -\frac{1}{2}$$

e quest'ultima disequazione non è mai verificata, data la positività della radice quadrata, quindi $f'(x) < 0$ per $x < 3$.

Infine,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3-x^2}{\sqrt{x-3}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x})}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}} = -\infty,$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x+3} - x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3-x^2}{\sqrt{-x+3}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x})}{1 + \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = +\infty, \end{aligned}$$

quindi non ci sono punti di massimo e minimo assoluti.

3. Per avere continuità in $x = 0$, determiniamo α e β tali che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2+x+1) + \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(2\beta x) \rightarrow \ln(1) + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0.$$

Quindi per $\alpha = 0$ e β qualsiasi la funzione è continua. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+x+1}, & x > 0, \\ 2\beta \cos(2\beta x), & x < 0. \end{cases}$$

Per avere derivabilità in $x = 0$, determiniamo β tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2\beta \cos(2\beta x) \rightarrow 1 = 2\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{2}.$$

Per $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$, $f(x)$ è continua e derivabile su \mathbb{R} , quindi

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+x+1), & x \geq 0, \\ \sin(x), & x < 0. \end{cases}$$

Ora, per $x > 0$ la funzione $\ln(x^2+x+1)$ è strettamente crescente, mentre per $x < 0$ la funzione $\sin(x)$ è invertibile in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, quindi il massimo intervallo di invertibilità della funzione f che comprenda l'origine è $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.

4. Calcoliamo

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(x)\right) \sin(x)$$

e studiamone il segno in $(0, \frac{\pi}{2})$. Prima di tutto,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(x)\right) \geq 0 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(x)\right) \geq \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \cos(x) \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos(x) \leq 1$$

è sempre verificata in $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. D'altra parte,

$$-\frac{\pi}{2} \sin(x)$$

è sempre negativo in $(0, \frac{\pi}{2})$, quindi $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e dunque f è invertibile in $(0, \frac{\pi}{2})$. Il dominio di f^{-1} è $(0, 1)$ e il codominio è $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ora,

$$\frac{df^{-1}}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

con

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = y_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos(x_0)\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \cos(x_0) \rightarrow \cos(x_0) = \frac{1}{2} \rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Quindi

$$\frac{df^{-1}}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \frac{-8}{\pi\sqrt{6}}.$$