# Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

(Prof. Pierpaolo Natalini)

Roberta Bianchini

30 ottobre 2017

## FOGLIO 1

1. Determinare il dominio e il segno della funzione

$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) - \pi/3.$$

2. Verificare l'invertibilità della funzione $y = f(x) = e^x + arctan(x)$. Calcolare $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(e + \frac{\pi}{4})$.

3. Dimostrare o confutare, mediante la definzione di limite, che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0.$$

4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{sin\sqrt{|x|}}.$$

5. Determinare l'espressione esplicita della funzione

$$f(x) = 2|x^2 - 1| + |x^3|.$$

6. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = (ln(|1 + x|))^{\frac{1}{|x|}}.$$

7. Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_n = n^2 - n$. Studiare la limitatezza di $\{a_n\}$. Determinare gli eventuali $\sup a_n$, $\inf a_n$, $\max a_n$, $\min a_n$. Giustificare le risposte utilizzando le definizioni.

8. Sia $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{n}{3n-1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Studiare la limitatezza di $A$. Determinare gli eventuali $\inf A, \sup A, \min A, \max A$. Giustificare le risposte usando le definizioni.

## SVOLGIMENTO

1. Prima di tutto dobbiamo chiedere che l'argomento della radice quadrata non sia negativo e l'argomento della funzione arccos sia compreso tra $-1$ e $1$. Questo vuol dire intersecare l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2-1 \geq 0$ con quello delle soluzioni delle due disequazioni $-1 \leq \sqrt{x^2-1}-x+1 \leq 1$ (è equivalente studiare $|\sqrt{x^2-1}-x+1| \leq 1$).

   In particolare $x^2-1 \geq 0$ ha come insieme delle soluzioni l'insieme

$$S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

   Mentre per trovare le soluzioni di

$$-1 \leq \sqrt{x^2-1} - x + 1 \leq 1$$

   bisogna studiare due equazioni irrazionali e intersecare le loro soluzioni. Le due disequazioni sono

$$\sqrt{x^2-1} \leq x$$

   e

$$\sqrt{x^2-1} \geq x-2$$

   La prima disequazione è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2-1 \leq x^2 \end{cases}$$

   che ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [1, +\infty).$$

   Allo stesso modo, la seconda disequazione ha come soluzioni l'unione delle soluzioni dei seguenti due sistemi

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq x^2-4x+4, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x-2 < 0, \end{cases}$$

   dove il primo ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap [2, +\infty) \cap [5/4, +\infty) = [2, +\infty),$$

mentre il secondo ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -1] \cup [1, 2).$$

L'unione dell'insieme delle soluzioni dei due sistemi è quindi $S_1$.

Intersecando gli insiemi delle soluzioni di

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad -1 \leq \sqrt{x^2 - 1} - x + 1 \leq 1,$$

risulta che il dominio della funzione $f(x)$ è la semiretta $[1, \infty)$.

Studiamo ora il segno della funzione $f(x)$. Risolviamo quindi la disequazione $f(x) > 0$, poi l'equazione $f(x) = 0$ e, per esclusione, troveremo anche le $x$ per cui $f(x) < 0$.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \arccos\left(\sqrt{x^2 - 1} - x + 1\right) - \pi/3 > 0$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\sqrt{x^2 - 1} - x + 1\right) > \pi/3$$

e, dato che $1/2 = \cos(\pi/3)$, si ha

$$\sqrt{x^2 - 1} - x + 1 < 1/2$$

(si inverte il segno della disequazione perché la funzione $\arccos(x)$ è strettamente decrescente).

Lo studio di $f(x) > 0$ si riduce alla risoluzione della seguente disequazione irrazionale

$$2\sqrt{x^2 - 1} < 2x - 1,$$

che è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 4x^2 - 4 < 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$S_1 \cap (1/2, +\infty) \cap (-\infty, 5/4) = [1, 5/4).$$

Quindi la funzione $f(x)$ è positiva per $x \in [1, 5/4)$. Studiamo ora dove la funzione si annulla, cioè dove

$$\arccos\left(\sqrt{x^2 - 1} - x + 1\right) - \pi/3 = 0.$$

Con lo stesso ragionamento fatto per la disequazione, questa equivale a

$$\sqrt{x^2-1}-x+1=1/2$$

che è verificata per $x=5/4$.

Possiamo concludere che

$$\begin{cases} f(x)>0 \text{ se} & x\in[1,5/4) \\ f(x)=0 \text{ se} & x=5/4 \\ f(x)<0 \text{ se} & x\in(5/4,+\infty) \end{cases}$$

2. Entrambe le funzioni considerate in $f(x)$, $e^x$ e $arctan(x)$, sono monotòne crescenti su tutto l'asse reale. Dato che la somma di funzioni crescenti è ancora una funzione crescente, $y=f(x)=e^x+arctan(x)$ è una funzione invertibile su tutto $\mathbb{R}$.
   Ora, determinare il valore di $f^{-1}(1)$ significa trovare $x\in\mathbb{R}$ tale che

   $$e^x+arctan(x)=1.$$

   Si nota immediatamente che l'equazione risulta valida per $x=0$, quindi $f^{-1}(1)=0$. Analogamente, si chiede di trovare $x\in\mathbb{R}$ tale che

   $$e^x+arctan(x)=e+\frac{\pi}{4}.$$

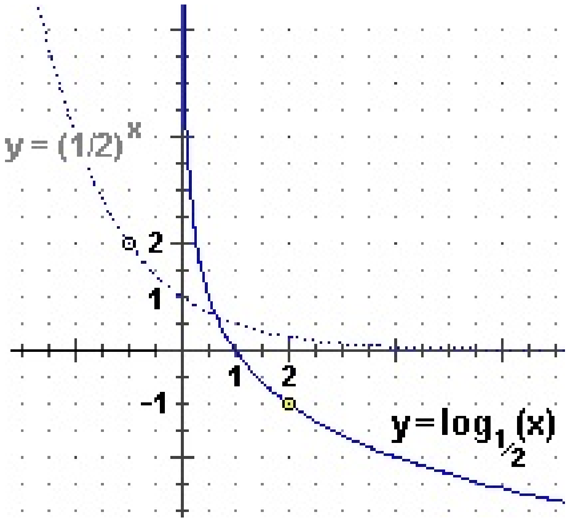
   In questo caso la $x$ cercata è 1, cioè $f^{-1}(e+\frac{\pi}{4})=1$.

3. Dimostriamo che $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$ usando la definizione di limite: vogliamo fare vedere che

   $$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0 \quad \text{tale che se } 0<x<\delta, \quad \text{allora} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\varepsilon.$$

   In pratica questo vuole dire risolvere la disequazione

   $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\varepsilon.$$




Questo ci porta a studiare la disequazione in termini della funzione $log_{1/2}(x)$. Notiamo che $log_{1/2}(x)$ ha **base**=$1/2 < 1$, quindi è una funzione decrescente e questo significa che dobbiamo invertire il segno della disequazione. Otteniamo quindi

$$\frac{1}{x} > log_{1/2}(\varepsilon) \to x < \frac{1}{log_{1/2}(\varepsilon)},$$

dove ricordiamo che $x > 0$ perché stiamo studiando $\lim_{x\to 0^+}$. Come si vede nel grafico, $log_{1/2}(x) > 0$ per $x < 1$, quindi $log_{1/2}(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere. Questo significa che abbiamo trovato il $\delta > 0$ che verifica la definizione: $\delta = \dfrac{1}{log_{1/2}(\varepsilon)}$.

Nell'altro caso, $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, consideriamo $x < 0$, perché stiamo studiando il limite a zero da sinistra e i numeri a sinistra di zero sono i negativi. Con lo stesso ragionamento di prima, questo ci porta a considerare

$$\frac{1}{x} > log_{1/2}(\varepsilon),$$

che non è mai vera per $\varepsilon < 1$, perché $x < 0$ e $log_{1/2}(\varepsilon) > 0$ per $\varepsilon < 1$. Abbiamo trovato dei valori di $\varepsilon$, cioè $\exists\varepsilon(< 1)$, per i quali $\forall\delta > 0$ la disequazione sopra non vale. Quindi $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$ è falsa.

4. La condizione da soddisfare è
$$\sin\sqrt{|x|} \geq 0.$$
La funzione $\sin(x)$ è positiva o nulla per $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}$. Quindi chiediamo che sia
$$2k\pi \leq \sqrt{|x|} \leq \pi + 2k\pi.$$
Per definizione, sappiamo che
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x & x < 0. \end{cases}$$
Di conseguenza dobbiamo risolvere
$$\begin{cases} 2k\pi \leq \sqrt{x} \leq \pi + 2k\pi, & x \geq 0; \\ 2k\pi \leq \sqrt{-x} \leq \pi + 2k\pi, & x < 0; \end{cases} \quad \to \begin{cases} 4k^2\pi^2 \leq x \leq (\pi + 2k\pi)^2, & x \geq 0; \\ -(\pi + 2k\pi)^2 \leq x \leq -4k^2\pi^2, & x < 0. \end{cases}$$
Il dominio cercato è dunque
$$S = [-(\pi + 2k\pi)^2, -4k^2\pi^2] \cup [4k^2\pi^2, (\pi + 2k\pi)^2].$$

5. Per definizione,
$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty); \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1); \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3, & x \geq 0; \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$$
Quindi
$$f(x) = \begin{cases} 2(x^2 - 1) - x^2, & x \in (-\infty, -1]; \\ -2(x^2 - 1) - x^3, & x \in (-1, 0); \\ -2(x^2 - 1) + x^3, & x \in [0, 1); \\ 2(x^2 - 1) + x^3, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

6. Dobbiamo risolvere il sistema seguente:
$$\begin{cases} ln|1 + x| \geq 0; \\ |x| \neq 0. \end{cases}$$

La disequazione dà

$$\begin{aligned}
&ln(|1+x|) \geq ln(1);\\
&|1+x| \geq 1;\\
&\begin{cases} x \geq -1; \\ x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -1; \\ x \leq -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Il dominio è dunque $S = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$.

7. Dimostriamo dapprima che la successione è strettamente crescente, cioè che

$$a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalla relazione

$$n^2 - n < (n+1)^2 - (n+1)$$

risulta

$$n^2 - n < n^2 + 2n + 1 - n - 1 \Rightarrow 0 < 2n,$$

che è soddisfatta $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi si ha che $0 = \min a_n$.

Dimostriamo ora che la successione è illimitata superiormente. Dobbiamo far vedere che

$$\forall K > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \, / \, n^2 - n > K,$$

che equivale a dire che non esiste un minorante per la successione. L'insieme delle soluzioni della disequazione $n^2 - n > K$, dove la costante $K$ deve essere interpretata come numero molto grande, è

$$S = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4K}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1+4K}}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{N}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{1+4K}}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{N},$$

che è non vuoto per l'illimitatezza $\mathbb{N}$ di in $\mathbb{R}$. Da ciò segue la tesi, questo implica:

- $\inf a_n = \min a_n = 0$;
- $\sup a_n = +\infty$;
- $\nexists \quad \max a_n$.

8. Prima di tutto dimostriamo che la successione $a_n = \frac{n}{3n-1}$ è strettamente decrescente. Dobbiamo verificare che

$$a_{n-1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si deve quindi risolvere la disequazione

$$\frac{n-1}{3(n-1)-1} > \frac{n}{3n-1} \to 1 > 0,$$

che è sempre vera, quindi la successione è strettamente decrescente. Questo vuol dire che

$$\sup_A = \max_A = \frac{1}{2},$$

quindi $A$ è limitato dal valore $\frac{1}{2}$. Inoltre,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3},$$

quindi $\inf_A = \dfrac{1}{3}$, e l'insieme $A$ non ammette minimo.