SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Successioni di funzioni

Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni definite tutte in un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 1: Si dice che la successione $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente su $S \subseteq D$ ad una funzione $f(x)$ se, $\forall x \in S$, risulta $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, cioè se

$$\forall x \in S \text{ e } \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon(x) \,/\, \forall n > n_\varepsilon(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Si usa la notazione $f_n \to f$ su S per indicare una successione $\{f_n(x)\}$ che converge puntualmente su $S \subseteq D$ alla funzione $f(x)$.

E' importante notare come la soglia $n_\varepsilon(x)$ dipenda sia da ε che dal punto *x* fissato in *S*. Questo significa che la disuguaglianza $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ è verificata, oltre che definitivamente rispetto all'indice *n*, anche in funzione della scelta del punto *x* in *S*.

In sostanza una volta fissato $\overline{x}$ in S la successione $\{f_n(\overline{x})\}$ è da interpretare come una successione numerica che converge al numero $f(\overline{x})$.

Esempio 1. Sia $f_n(x) = x^n$.

Questa successione, le cui funzioni sono tutte definite e continue in R, converge puntualmente solo sull'intervallo $(-1,1]$ alla funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$. In tal caso, l'intervallo $(-1,1]$ si dice insieme di convergenza puntuale della successione $\{f_n(x)\}$.

E' possibile verificare, attraverso dei contro-esempi, che dalla convergenza puntuale, su *S*, di una successione $\{f_n(x)\}$ alla funzione limite $f(x)$ non seguono le seguenti proprietà:

i) $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ (passaggio del limite sotto il segno di limite);

ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x)$ (passaggio del limite sotto il segno di derivata);

iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (passaggio del limite sotto il segno di integrale);

dove i punti $x_0, a, b \in S$. Ovviamente, nei punti precedenti, si suppone l'esistenza dei limiti per $x \to x_0$, la derivabilità e l'integrabilità in $[a,b]$ di tutte le funzioni $f_n(x)$ e $f(x)$. Inoltre la validità o meno della i) implica la validità o meno della seguente proprietà

i)' se le funzioni $f_n(x)$ sono tutte continue in x_0 allora lo è anche $f(x)$.

Esempio 2. Una successione di funzioni continue in $[a,b]$ che converge puntualmente ad una funzione discontinua su $[a,b]$. Sia $f_n(x) = x^n$, con $x \in [0,1]$. Tutte queste funzioni sono continue in $[0,1]$, ma la funzione limite $f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in[0,1)\\ 1 & \text{se } x=1\end{cases}$ presenta una discontinuità in 1. Quindi, in generale, la proprietà i) (e quindi la i)') non vale.

Esempio 3. Una successione di funzioni per cui non vale la ii). Sia $f_n(x)=nx\left(1-x^2\right)^n$, con $x\in[0,1]$. Si vede facilmente che $f_n \to f\equiv 0$ su $[0,1]$. Inoltre si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-x^2\right)^n-2x^2n^2\left(1-x^2\right)^{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(1-x^2\right)^{n-1}\left(1-x^2-2x^2n\right)\right)=\begin{cases}0 & se\ x\in(0,1]\\ +\infty & se\ x=0\end{cases}$$

mentre

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}0=0,\ \forall x\in[0,1].$$

Esempio 4. La successione $f_n(x)=nx\left(1-x^2\right)^n$, con $x\in[0,1]$ fornisce anche un esempio per cui non vale la iii). Infatti.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx\left(1-x^2\right)^n dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\right)\int_0^1\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\right)\left[\left(1-x^2\right)^{n+1}\right]_0^1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2},$$

mentre

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1 0dx=0.$$

Allo scopo di recuperare la validità delle proprietà i) ii) e iii) si introduce il concetto di convergenza uniforme.

Definizione 2: Si dice che la successione $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $S\subseteq D$ ad una funzione $f(x)$ se, indipendente da *x*, risulta $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, cioè se

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\ /\ \forall n>n_\varepsilon\Rightarrow\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon,\quad\forall x\in S.$$

Se $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente su $S\subseteq D$ alla funzione $f(x)$ scriveremo in forma più compatta $f_n\Rightarrow f$ su *S*.

E' importante notare come, in questo caso, la soglia n_ε dipenda solo da ε e non dal punto *x* di *S,* quindi la disuguaglianza $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ vale definitivamente soltanto rispetto all'indice *n*, ma indipendentemente dalla scelta di *x* in *S.* Dal punto di vista geometrico ciò si può interpretare dicendo che, all'aumentare di *n*, i grafici delle funzioni f_n tendono ad approssimare sempre meglio il grafico della funzione limite f fino a sovrapporsi a essa al limite o, alternativamente, che $\forall n>n_\varepsilon$ l'intero grafico su S di ogni f_n è contenuto in un tubo di altezza 2ε delimitato dai grafici delle funzioni $f(x)-\varepsilon$ e $f(x)+\varepsilon$.

Si può dimostrare che la definizione 2 equivale alla seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ / \ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in S} \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \ ;$$

infatti, essendo l'estremo superiore un maggiorante, si ha $\forall x \in S$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| \le \sup_{x \in S} \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \ ,$$

inoltre, essendo l'estremo superiore anche il più piccolo dei maggioranti, $\exists \overline{x} \in S$ tale che

$$\sup_{x \in S} \left| f_n(x) - f(x) \right| < \left| f_n(\overline{x}) - f(\overline{x}) \right| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Quindi vale il seguente il risultato

Teorema 1. CNES affinché $f_n \Rightarrow f$ su S è che $\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in S} \left| f_n(x) - f(x) \right| \right) = 0$.

Nell'esempio 2 la successione $\{f_n(x)\}$ non converge uniformemente su $[0,1]$ alla funzione limite $f(x)$ in quanto, per $x = 1$ si ha $\left| f_n(1) - f(1) \right| = 0$, ma $\sup_{x \in [0,1)} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x \in [0,1)} \left| x^n \right| = 1, \forall n \in \mathrm{N}$ (la convergenza è invece verificata su qualsiasi intervallo $[0,b]$ con $b < 1$). Anche negli esempi 3 e 4 la successione $\{f_n(x)\}$ non converge uniformemente alla funzione limite $f(x) \equiv 0$ in quanto si può dimostrare che $\sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) \right| = n \sqrt{\frac{1}{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n} \right)^n, \forall n \in \mathrm{N}$ e, quindi, che $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| f_n(x) \right| = \lim_{n \to \infty} n \sqrt{\frac{1}{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n} \right)^n = +\infty$.

Esempio 5. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Si ha $f_n(x) \to 0$ su $[0, +\infty)$. Inoltre $\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{1}{(nx+1)^2}$ da cui segue la stretta crescenza delle funzioni $f_n(x)$ in $[0, +\infty)$. Quindi $\sup_{x \in [0,+\infty)} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}$. In conclusione avremo $\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in [0,+\infty)} \left| f_n(x) - f(x) \right| \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ da cui segue la uniforme convergenza.

Si può dimostrare il seguente risultato

Teorema 2. Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni tale che $f_n \Rightarrow f$ su S. Allora, se tutte le funzioni $f_n(x)$ sono continue in $x_0 \in S$, anche la funzione limite $f(x)$ è continua in x_0.

Ovviamente questo teorema può essere sfruttato per stabilire se una convergenza puntuale sia anche uniforme.

Più in generale possiamo enunciare la seguente proprietà:

Teorema 3. Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni tale che $f_n \Rightarrow f$ su *S*, e sia x_0 un punto di accumulazione di *S*. Allora, se ciascuna funzione $f_n(x)$ converge al valore α_n per $x \to x_0$, anche la funzione limite $f(x)$ converge al numero α per $x \to x_0$ e risulta $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

I seguenti due teoremi forniscono condizioni sufficienti per garantire il passaggio del limite sotto il segno di derivata o di integrale. Del primo esistono varie versioni con ipotesi più o meno restrittive.

Teorema 4. Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni tale che $f_n \to f$ su *S*. Sia ciascuna funzione $f_n(x)$ derivabile in *S* e risulti $f_n' \Rightarrow F$ su *S*. Allora la convergenza di $\{f_n(x)\}$ a $f(x)$ è anche uniforme su *S*; inoltre la funzione limite $f(x)$ è derivabile in *S* e risulta $F(x) = f'(x)$.

Teorema 5. Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni continue in $[a,b]$ tale che $f_n \Rightarrow f$ su $[a,b]$. Allora risulta $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Serie di funzioni

Definizione 3: Si dice che la serie di funzioni $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente su S ad una funzione somma $s(x)$ se la successione delle somme parziali $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformemente a $s(x)$ su S, cioè $s_n(x) \Rightarrow s(x)$ su *S*.

Analogamente alle successioni numeriche vale la seguente condizione necessaria di convergenza uniforme

Teorema 6. Condizione necessaria affinché la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ risulti uniformemente convergente su S è che $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in S} |f_k(x)| = 0$, cioè che la successione dei suoi termini generali converga uniformemente a 0 su *S*.

Infatti se $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ è uniformemente convergente a $s(x)$ su *S*, si ha $s_n(x) \Rightarrow s(x)$ e $s_{n-1}(x) \Rightarrow s(x)$ su *S*. Allora risulta $s_n(x) - s_{n-1}(x) = f_n(x) \Rightarrow 0$ su S, cioè $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in S} |f_n(x)| = 0$.

Un criterio che si può utilizzare per dimostrare che una serie di funzioni non converge uniformemente è il seguente:

Teorema 7. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ convergente puntualmente su (a,b) e sia la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$ non convergente; inoltre le funzioni $f_k(x)$ siano continue in $[a,b)$. Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ non converge uniformemente su (a,b).

Il seguente esempio, facendo uso del teorema 7, mostra come la condizione di convergenza uniforme di una serie (enunciata nel teorema 6) sia solo necessaria ma non sufficiente.

Esempio 6. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ sull'intervallo $[0,1)$.

Sfruttando il criterio del rapporto si dimostra la convergenza puntuale della serie in $[0,1)$. Inoltre, per $x=1$ la serie numerica diverge. Essendo le funzioni $\frac{x^k}{k}$ tutte continue in $[0,1]$ $\forall k \in \mathrm{N}$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ non converge uniformemente sull'intervallo $[0,1)$.

Analogamente al caso delle successioni, per le serie di funzioni valgono i seguenti teoremi:

Teorema 8. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni continue in *S*. Se la serie converge uniformemente su *S*, allora la funzione somma è anche continua in *S*.

Teorema 9. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni convergente puntualmente a $s(x)$ su *S*. Sia ciascuna funzione $f_k(x)$ derivabile in S e risulti $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ (detta serie derivata) uniformemente converge a $F(x)$ su *S*. Allora la convergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ a $s(x)$ è anche uniforme su *S*; inoltre la funzione limite $s(x)$ è derivabile in *S* e risulta $F(x)=s'(x)$.

Teorema 10. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ uniformemente converge a $s(x)$ su $[a,b]$. Sia, ciascuna funzione $f_k(x)$ continua in $[a,b]$. Allora $\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\, dx \right)$.

Definizione 4: Si dice che la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge totalmente se esiste una serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ convergente tale che $|f_k(x)| \le M_k$ $\forall x \in S$ e $\forall k \ge k_0$.

Teorema 11 (Criterio di Weierstrass). Se $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge totalmente su S allora essa converge uniformemente su *S*.

Esempio 6. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)^{k/2}$.

E' una serie geometrica di ragione $\sqrt{1-x}$, pertanto l'insieme di convergenza puntuale è $(0,1]$. Poiché il termine generico è continuo in $[0,1]$ e la serie numerica ottenuta per $x=0$ diverge , non c'è convergenza uniforme su $(0,1]$. La convergenza uniforme si verifica, per il criterio di Weierstrass, su ogni intervallo $[a,1]$ con $0<a<1$; infatti si ha $|f_k(x)|=(1-x)^{k/2} \le (1-a)^{k/2}$ $\forall x \in [a,1]$ e la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}(1-a)^{k/2}$ converge.

Il seguente esempio mostra una serie che è uniformemente convergente senza essere totalmente convergente.

Esempio 7. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{x^{2k}+k}$.

La serie, $\forall x \in \mathbb{R}$, verifica le condizioni del criterio di Leibniz e quindi l'insieme di convergenza puntuale è $\mathbb{R}$. Inoltre, sempre dal criterio di Leibniz si ha

$$|s(x)-s_n(x)| \le |f_n(x)| = \frac{1}{x^{2n}+n} \le \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

quindi, $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathrm{R}}|s(x)-s_n(x)|=0$ da cui segue l'uniforme convergenza della serie su $\mathbb{R}$. Tuttavia la serie non converge totalmente perché $\sup_{x\in\mathrm{R}}|f_n(x)|=\frac{1}{n}$, ma la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge.

Esempio 8. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie $\sum_{k=2}^{\infty}\arctan^2\left(\frac{(k-2)x}{k^2-3}\right)$.

La serie, $\forall x \in \mathbb{R}$, è asintoticamente equivalente alla serie $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(k-2)x}{k^2-3}\right)^2$ e quindi alla serie $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^2}{k^2}$ che converge. Inoltre $\sup_{x\in\mathrm{R}}\left(\arctan^2\left(\frac{(k-2)x}{k^2-3}\right)\right)=\frac{\pi^2}{4} \not\to 0$ per $k\to\infty$ e quindi non è verificata la condizione necessaria di convergenza uniforme di una serie.

Tuttavia, la serie data converge totalmente su ogni intervallo chiuso e limitato, per esempio del $[-\alpha,\alpha]$, $\forall \alpha>0$; infatti $\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]}\left(\arctan^2\left(\frac{(k-2)x}{k^2-3}\right)\right)=\arctan^2\left(\frac{(k-2)\alpha}{k^2-3}\right)$ e la serie numerica $\sum_{k=2}^{\infty}\arctan^2\left(\frac{(k-2)\alpha}{k^2-3}\right)$ converge, essendo asintoticamente equivalente alla serie $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^2}{k^2}$.

Serie di potenze

Definizione 5: Si dice serie di potenze di centro x_0 a coefficienti reali o complessi a_k una serie di funzioni del tipo $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$.

Sfruttando il criterio del confronto si dimostra che se la serie di potenze converge in un punto $x_1 \neq x_0$ allora, posto $h = |x_1 - x_0|$, essa converge assolutamente in ogni punto $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Infatti dalla convergenza della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1 - x_0)^k$ segue necessariamente $\lim_{k\to\infty} a_k (x_1 - x_0)^k = 0$ e quindi la limitatezza della successione $\left\{a_k (x_1 - x_0)^k\right\}$; cioè esiste un $M \in \mathrm{R}$ tale che risulta $\left|a_k (x_1 - x_0)^k\right| \leq M, \quad \forall k$. Allora $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k (x - x_0)^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x_1 - x_0|^k \frac{|x - x_0|^k}{|x_1 - x_0|^k} \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k .$$

L'ultima serie è di tipo geometrico con ragione $\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| < 1$ e quindi convergente. In conclusione, per il criterio del confronto risulta convergente anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k (x - x_0)^k\right|$.

Per determinare l'insieme di convergenza puntuale S della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, ammesso che la successione ausiliaria $\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$ sia regolare, sfruttiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}}{a_k (x - x_0)^k}\right| = |x - x_0| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|;$$

per cui $\forall x \in \mathrm{R}$ tale che $|x - x_0| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ si ha la convergenza assoluta e quindi puntuale, mentre $\forall x \in \mathrm{R}$ tale che $|x - x_0| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ la serie non converge (perché se convergesse allora dovrebbe convergere assolutamente in ogni punto compreso tra un estremo dell'intervallo $\left(x_0 - \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, x_0 + \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|\right)$ e x. Infine si ha un caso dubbio in quei punti $x \in \mathrm{R}$ tali che $|x - x_0| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$.

Definizione 6: Se la successione ausiliaria $\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\}$ è regolare, allora si dice raggio di convergenza della serie di potenze il numero $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

Il raggio di convergenza si può anche calcolare utilizzando, qualora risulti regolare, la successione ausiliaria $\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right\}$, infatti si ha $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right|$.

Da quanto detto, si ha che la serie di potenze converge puntualmente nell'intervallo $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, mentre diverge all'esterno. Agli estremi di tale intervallo occorre fare una verifica diretta. Ovviamente, nei casi estremi in cui $\rho=+\infty$ oppure $\rho=0$, si ha che l'insieme di convergenza è rispettivamente tutto l'asse reale o l'insieme costituito dal solo centro x_0.

Esempio 9. Studiare la convergenza puntuale delle serie di potenza $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

Per tutte e tre le serie il raggio di convergenza è $\rho=\lim_{k\to\infty} 1=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{(k+1)^2}=1$, quindi tutte convergono in $(-1,1)$. Per $x=1$ converge solo la terza, mentre per $x=-1$ converge sia la seconda che la terza. In conclusione i tre insiemi di convergenza puntuale per le tre serie sono rispettivamente $S_1=(-1,1)$, $S_2=[-1,1)$ e $S_3=[-1,1]$.

Si può dimostrare il seguente teorema

Teorema 12. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze. Allora

- se $\rho=0$ la serie converge puntualmente solo in x_0;
- se $\rho\in(0,+\infty)$ la serie converge assolutamente in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$; inoltre la serie converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo $[x_0-h, x_0+h]$ con $0<h<\rho$;
- se $\rho=+\infty$ la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$; inoltre la serie converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo $[-\alpha,\alpha]$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze; consideriamo la rispettiva serie derivata $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}$ e la serie integrata $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$. Allora vale il seguente teorema

Teorema 13. Una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ e le rispettive serie derivata e integrata hanno lo stesso raggio di convergenza. Inoltre, se $\rho>0$ oppure $\rho=+\infty$, allora la somma $s(x)$ della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ è continua e derivabile in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ e $\forall x\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$ si ha

$$s'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1} \quad \text{e} \quad \int_{x_0}^{x} s(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}.$$

Possiamo anche scrivere le ultime due formule nel modo seguente

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx} a_k (x-x_0)^k \quad \text{e} \quad \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} a_k (x-x_0)^k\,dx\right).$$

Iterando il primo risultato del teorema 13, otteniamo

Corollario 1. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$ oppure $\rho = +\infty$. Allora detta $s(x)$ la sua somma, si ha che $s(x)$ è di classe C^∞ in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ e risulta $a_k = \frac{s^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\forall k \in \mathrm{N}$. Se, invece, $\rho = 0$ allora $a_k = 0$ $\forall k \in \mathrm{N}$.

Corollario 2. Siano $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ due serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$ oppure $\rho = +\infty$. Allora, se le serie hanno la stessa somma in $(x_0-\sigma, x_0+\sigma)$ con $0 < \sigma < \rho$, risulta $a_k = b_k$ $\forall k \in \mathrm{N}$.

Sviluppo in serie di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione di classe C^∞ nell'intorno $I_\delta(x_0)$.

Definizione 7: Si dice serie di Taylor della funzione *f* di centro x_0 la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Abbiamo visto, nel corollario 1, che se la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ rappresenta (cioè ha come somma) una funzione $f(x)$ in un intorno $I_\delta(x_0)$, allora necessariamente $f \in C^\infty(I_\delta(x_0))$ e inoltre $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\forall k \in \mathrm{N}$, cioè la serie di potenze coincide con la serie di Taylor della funzione *f* di centro x_0. In altre parole la serie di Taylor della funzione *f* di centro x_0 è l'unica candidata a rappresentare la funzione *f* nell'intorno $I_\delta(x_0)$.

Tuttavia, non sempre la serie di Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ rappresenta effettivamente la funzione *f*; potrebbe succedere che questa non converga per qualche *x* del dominio della *f* (come, vedremo, accade per gli sviluppi delle funzioni elementari), oppure che questa converga ma non ad *f* (come mostra il seguente esempio).

Esempio 10. Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se\, x \neq 0 \\ 0 & se\, x = 0 \end{cases}$. La funzione è di classe C^∞ in R e, quindi, in un intorno di 0, ma si ha che $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k \in \mathrm{N}$, da cui segue che la rispettiva serie di MacLaurin è $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ che, in qualsiasi intorno di 0 non coincide (e quindi non rappresenta) la funzione.

Definizione 8: Una funzione *f* di classe C^∞ nell'intorno $I_\delta(x_0)$ si dice sviluppabile in serie di Taylor in $I_\delta(x_0)$ se, $\forall x \in I_\delta(x_0)$, si ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

L'esempio 10 mostra che la condizione che *f* sia di classe C^∞ in $I_\delta(x_0)$ è solo necessaria ma non sufficiente a garantire la sua sviluppabilità in serie di Taylor in quell'intorno.

Per stabilire una condizione che sia anche sufficiente consideriamo la formula di Taylor. Infatti se *f* è di classe C^∞ nell'intorno $I_\delta(x_0)$ allora, $\forall x \in I_\delta(x_0)$ e $\forall n \in \mathrm{N}$, si ha

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

dove $R_n(x)$ è il resto della formula di Taylor di ordine *n* che sappiamo essere $R_n(x) = o\left[(x-x_0)^n\right]$ per $x \to x_0$. Allora si ha il seguente risultato

Teorema 14. CNES affinché una funzione $f \in C^\infty(I_\delta(x_0))$ sia sviluppabile in $I_\delta(x_0)$ in serie di Taylor di centro x_0 è che $\forall x \in I_\delta(x_0)$ si abbia

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Purtroppo verificare quest'ultima condizione è spesso difficile; è utile perciò il seguente criterio di più facile applicazione:

Teorema 15. Sia $f \in C^\infty(I_\delta(x_0))$. Allora CS affinché, $\forall x \in I_\delta(x_0)$, risulti $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ è che esistano due costanti $M \geq 0$ e $L \geq 0$ tali che

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq ML^k, \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \text{ e } \forall n \in \mathrm{N}.$$

Sviluppi in serie di Taylor delle funzioni elementari.

Determiniamo lo sviluppo in serie di MacLaurin delle funzioni elementari.

Esempio 11. (sviluppo di e^x). La funzione $f(x) = e^x$ è di classe C^∞ in R. La rispettiva serie di MacLaurin è $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Poiché $f^{(k)}(x) = e^x$ è illimitata su R essa non soddisfa la condizione sufficiente del teorema 15. Tuttavia, la stessa condizione è verificata in qualsiasi intervallo chiuso $[-\alpha, \alpha]$, con $\alpha > 0$ fissato. In tale intervallo la funzione verifica la condizione suddetta con $M = e^\alpha$ e $L = 1$, infatti $\left|f^{(k)}(x)\right| = e^x \leq e^\alpha$. Si ottiene, quindi che, $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, si ha $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ e per l'arbitrarietà di α si ha la sviluppabilità di $f(x) = e^x$ su tutto R, cioè

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathrm{R}}.$$

Esempio 12. (sviluppo di $\sinh x$ e di $\cosh x$). Dallo sviluppo $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\forall x \in \mathrm{R}$, ponendo $-x$ al posto di x, si ha $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, $\forall x \in \mathrm{R}$. Per cui segue subito che

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathrm{R}};$$

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathrm{R}}.$$

Esempio 13. (sviluppo di $\sin x$ e di $\cos x$). Le funzioni sono entrambe di classe C^∞ in R. Poiché $\left|\frac{d^k}{dx^k}\sin x\right| \le 1$ e $\left|\frac{d^k}{dx^k}\cos x\right| \le 1$ su R, esse soddisfano su tutto R la condizione sufficiente del teorema 15, con $M = L = 1$. Si ottiene pertanto

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathrm{R}};$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathrm{R}}.$$

Esempio 14. (sviluppo di $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R}$). Si può dimostrare che

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \forall x \in (-1,1)}.$$

Prima di passare ad altri sviluppi, formuleremo senza dimostrazione il teorema di Abel, che sarà utile in seguito. Questo teorema ci fornisce le condizioni per stabilire la regolarità della funzione somma anche agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Sia $\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$; allora sappiamo che la funzione somma $f(x)$ è continua in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. E agli estremi cosa si può dire?

Teorema 16. (Teorema di Abel). Sia $f(x)$ la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, con raggio di convergenza $\rho > 0$. Se la serie converge anche in $x_0 + \rho$ (oppure in $x_0 - \rho$), cioè se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$ converge, allora la funzione $f(x)$ è continua, a sinistra, anche in $x_0 + \rho$ (oppure, a destra, in $x_0 - \rho$) e si ha $\lim_{x \to (x_0+\rho)^-} f(x) = f(x_0 + \rho) = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k$ oppure $\lim_{x \to (x_0-\rho)^+} f(x) = f(x_0 - \rho) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \rho^k$.

Sfruttiamo questo risultato per studiare la sviluppabilità di altre funzioni elementari

Esempio 15. (sviluppo di $\arctan x$). E' noto che la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è la somma della serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nell'intervallo $(-1,1)$. Ponendo $-x^2$ al posto di x si ottiene

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \quad \forall x\in(-1,1).$$

Integrando per serie si ottiene

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\right)dt \quad \forall x\in(-1,1)$$

da cui, per il teorema 13

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^k t^{2k}dt\right) \quad \forall x\in(-1,1)$$

e quindi, calcolando l'integrale,

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x\in(-1,1).$$

Inoltre, la serie di potenze a secondo membro converge, per il criterio di Leibniz, anche in 1 e in -1, quindi, dal teorema di Abel si ha

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall x\in[-1,1];$$

in particolare, per $x=1$, abbiamo $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

e , per $x=-1$, abbiamo $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

In questo modo abbiamo anche calcolato la somma di una serie a termini di segno alterno.

Esempio 16. (sviluppo di $\ln(1-x)$). Dallo sviluppo $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ nell'intervallo $(-1,1)$, integrando per serie si ottiene

$$\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^k\right)dt \quad \forall x\in(-1,1)$$

da cui, per il teorema 13

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^k dt\right) \quad \forall x\in(-1,1)$$

e quindi, calcolando l'integrale,

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall x\in(-1,1).$$

Inoltre, la serie di potenze a secondo membro converge, per il criterio di Leibniz, anche -1, quindi, dal teorema di Abel si ha

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall x\in[-1,1);$$

in particolare, per $x=-1$, abbiamo $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}=-\ln 2$

Esempio 17. (sviluppo di $\ln(1+x)$). Dallo sviluppo $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ nell'intervallo $(-1,1)$, ponendo $-x$ al posto di x e integrando per serie si ottiene

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k\right)dt \quad \forall x\in(-1,1)$$

da cui, per il teorema 13

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k\int_0^x t^k dt\right) \quad \forall x\in(-1,1)$$

e quindi, calcolando l'integrale,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall x\in(-1,1).$$

Inoltre, la serie di potenze a secondo membro converge, per il criterio di Leibniz, anche in 1, quindi, dal teorema di Abel si ha

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall x\in(-1,1].$$