1 Trasformata di Laplace.

1.1 Definizioni e esempi.

Definizione 1.1. *Sia f una funzione di variabile reale, nulla in $(-\infty, 0)$; sia $p \in \mathbb{C}$. La trasformata di Laplace di f è la funzione $\mathcal{L}[f]$ definita dalla formula*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\ dx \tag{1}$$

L'applicazione

$$\mathcal{L} : f \longmapsto \mathcal{L}[f]$$

si chiama trasformazione di Laplace.

Il numero complesso $p = u + iv$ è tale che

$$f(x)e^{-px} = f(x)e^{-ux-ivx} = f(x)e^{-ux}e^{-ivx} = f(x)[\cos(vx) - i\sin(vx)]e^{-ux}$$

Da tale eguaglianza, se risultano finiti entrambi gli integrali generalizzati di $Re(f(x)e^{-px})$ e di $Im(f(x)e^{-px})$, si ha che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\ dx$ in (1) risulta essere pari al numero complesso

$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(vx)e^{-ux}\ dx - i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(vx)e^{-ux}\ dx$$

La convergenza dei due integrali appena scritti avviene se converge

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|e^{-ux}\ dx$$

Dunque, $\mathcal{L}[f](p)$ risulta definita per $p = u + iv \quad \forall v \in \mathbb{R}$, se tale ultimo integrale converge per un certo $u \in \mathbb{R}$.
La funzione f si dice trasformabile secondo Laplace se $\mathcal{L}[f](p)$ è ben definita per almeno un valore di $p \in \mathbb{C}$.

Siano $\sigma[f] := \inf\{Re(p) : \exists\mathcal{L}[f], Re(p) > u\}$ e $\pi := \{p \in \mathbb{C} : Re(p) > \sigma[f]\}$; $\sigma[f]$ è l'ascissa di convergenza della funzione f, il semipiano π si chiama semipiano di convergenza.

Definizione 1.2. *Sia I un intervallo tale che $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty) \subseteq I$. La funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice di ordine esponenziale α, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se essa verifica una diseguaglianza del tipo $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$; in tal caso $\sigma[f] \leq \alpha$. Si osservi che una funzione di ordine esponenziale $\alpha = 0$ è semplicemente una funzione limitata: $|f(x)| \leq M$.*

Teorema 1.3. *Sia f una funzione tale che $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$ per $x \longrightarrow +\infty$, con M e α positivi; allora f è trasformabile, $\mathcal{L}[f]$ esiste nel semipiano complesso $Re(p) > \alpha$ e inoltre si ha che*

$$\lim_{Re(p)\to+\infty} \mathcal{L}[f](p) = 0 \tag{2}$$

Proposizione 1.4. *Se $\mathcal{L}[f](p)$ esiste per $p = p_0$, allora esiste anche nel semipiano $\{p \in \mathbb{C} : Re(p) > Re(p_0)\}$ e vale la (2).*

Esempio 1.5. *La funzione di Heaviside $H(x)$, detta anche gradino unitario, è la funzione caratteristica di $\mathbb{R}^+$, ovvero*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Posto $p = u + iv$, da $|e^{-px}| = e^{-ux}$, segue che la funzione $x \to e^{-px}$ è integrabile in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $u > 0$; dunque l'ascissa di convergenza è 0 e la trasformata di Laplace si può calcolare come integrale improprio:

$$\mathfrak{L}[H](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\ dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-px}\ dx = \lim_{T\to+\infty} \left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right)\Big|_0^T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1-e^{-pT}}{p}$$

Come illustrato, tale limite esiste finito solo se $Re(p) > 0$ dunque

$$\mathfrak{L}[f](p) = \frac{1}{p}$$

con semipiano di convergenza $Re(p) > 0$.

Esempio 1.6. *Per h numero reale positivo, si consideri l'impulso di durata h*

$$f(x) = H(x) - H(x-h) = \begin{cases} 1 \ \text{se } 0 \le x < h \\ 0 \ \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risulta

$$\mathfrak{L}[f](p) = \int_0^h e^{-px}\ dx = \begin{cases} -\frac{e^{-px}}{p}\Big|_0^h = -\frac{1-e^{-ph}}{p} \ \text{se } p \neq 0 \\ \\ h \ \text{se } p = 0 \end{cases}$$

La funzione ottenuta ha una singolarità eliminabile nell'origine: essendo $e^{-ph} = 1 - hp + O(p^2)$, si ha $\lim_{p\to 0} \frac{1-e^{-ph}}{p} = h$, in accordo con il valore calcolato per $p = 0$; $\sigma[f] = -\infty$.
Dividendo per h la funzione precedente, si ha l'impulso unitario di durata h

$$\delta_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} \ \text{se } 0 \le x < h \\ \\ 0 \ \text{se } x \ge h \end{cases} \tag{3}$$

risulta $\int_0^{+\infty} \delta_h(x)\ dx = 1$ per ogni $h > 0$ e

$$\mathfrak{L}[\delta_h](p) = \int_0^h \frac{1}{h}e^{-px}\ dx = \frac{1-e^{-ph}}{ph} \ \text{che tende a 1 per } h \longrightarrow 0.$$

Esempio 1.7. *La distribuzione di Dirac nell'origine è data da*

$$\delta(x) = \lim_{h\to 0} \delta_h(x)$$

e da (3) si ha, come anticipato al termine dell'esempio precedente, che

$$\mathfrak{L}[\delta](p) = \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ph}}{ph} = 1$$

Esempio 1.8. *La funzione esponenziale $f : x \to e^{ax}$ con $a = c + id \in \mathbb{C}$.*
La funzione $f : x \to e^{-px}e^{ax} = e^{-(p-a)x}$ è integrabile se e solo se $Re(p-a) = u - c > 0$, ovvero se $u > c$. Dunque $\sigma[f] = c$; nel semipiano definito da questa eguaglianza, il calcolo della trasformata della funzione f è simile a quello visto nell' esempio 1.5:

$$\mathfrak{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)x}\ dx = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-(p-a)x}\ dx = \lim_{T\to+\infty} \left(-\frac{e^{-(p-a)x}}{p-a}\Big|_0^T\right) = \frac{1}{p-a}$$

1.2 Proprietà .

Proposizione 1.9. *Siano f_1 e f_2 due funzioni per le quali esiste la trasformata di Laplace, con ascisse di convergenza $\sigma[f_1]$ e $\sigma[f_2]$ rispettivamente; se $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, per la funzione $x \to c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ esiste la trasformata di Laplace nel semipiano $Re(p) > \max\{\sigma[f_1], \sigma[f_2]\}$ e per le p di tale insieme si ha*

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](p) = c_1 \mathcal{L}[f_1](p) + c_2 \mathcal{L}[f_2](p)$$

Esempio 1.10. *In base al risultato dell'Esempio 1.8, con $a = \pm id$, $d \in \mathbb{R}$, si ha*

$$\mathcal{L}[e^{\pm idx}](p) = \frac{1}{p \mp id} \quad \textit{con} \quad Re(p) > 0.$$

Dalle formule di Eulero

$$\sin(dx) = \frac{e^{idx} - e^{-idx}}{2i} \qquad \textit{e} \qquad \cos(dx) = \frac{e^{idx} + e^{-idx}}{2}$$

segue che

$$\mathcal{L}[\sin(dx)](p) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - id} - \frac{1}{p + id}\right) = \frac{d}{p^2 + d^2}$$
$$\mathcal{L}[\cos(dx)](p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - id} + \frac{1}{p + id}\right) = \frac{p}{p^2 + d^2}$$

con semipiano di convergenza $Re(p) > 0$.

Teorema 1.11. *Sia f derivabile con derivata continua a tratti in $[0, +\infty)$; inoltre, nel semipiano $Re(p) > u$ esista la trasformata di f'; allora f è trasformabile nel semipiano $Re(p) > \max\{u, 0\}\, 0$ vale la formula*

$$\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

Se esiste, trasformabile, f'', si ha

$$\mathcal{L}[f''](p) = p^2 \mathcal{L}[f](p) - pf(0) - f'(0)$$

Proposizione 1.12. *Siano f e g nulle in $(-\infty, 0)$. Il loro prodotto di convoluzione è definito dalla formula*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - t)g(t)\ dt = \int_0^x f(t)g(x - t)\ dt$$

Se f è trsformabile nel semipiano $Re(p) > u$ e $|g|$ è trasformabile nello stesso semipiano, allora anche $f * g$ è trasformabile in $Re(p) > u$ e vale la formula

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p)$$

Proposizione 1.13. *Se $|f(x)| \leq Me^{ux}$, definitivamente per $x \longrightarrow +\infty$, si ha*

$$\mathcal{L}[(-1)^n x^n f(x)](p) = \frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[f](p) \ \textit{con}\ Re(p) > u \ \textit{e per ogni}\ n \geq 0$$

Proposizione 1.14. *Sia f una funzione Per cui esista la sua trasformata di Laplace, f nulla per $x < 0$, con ascissa di convergenza $\sigma[f]$; allora si ha:*

i) $\mathcal{L}[f(cx)](p) = \frac{1}{c}\mathcal{L}[f(x)](\frac{p}{c}) \qquad c > 0, Re(p) > c\sigma[f];$

ii) $\mathcal{L}[f(x - x_0)](p) = e^{-px_0}\mathcal{L}[f(x)](p) \qquad x_0 > 0, Re(p) > \sigma[f];$

iii) $\mathcal{L}[f(x)e^{ax}](p) = \mathcal{L}[f(x)](p-a) \qquad a \in \mathbb{C}, Re(p) > \sigma[f] + Re(a);$

Esempio 1.15. *In base ai risultati dell'esempio 1.10, utilizzando la proprietà iii) della proposizione precedente, per ogni numero complesso a si ha*

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}\sin(dx)](p) &= \frac{d}{(p-a)^2+d^2} \\ \mathcal{L}[e^{at}\cos(dx)](p) &= \frac{p-a}{(p-a)^2+d^2} \end{aligned}\right\} \qquad Re(p) > Re(a)$$

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita su un intervallo I, con $[0, +\infty) \subseteq I$; si definisca la funzione

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

se, dunque, f è definita su $\mathbb{R}$, si ha $f_+(x) = H(x)f(x)$. A sua volta, la funzione di Heaviside H può essere pensata come ottenuta dalla costante 1 mediante annullamento per t negativo, ovvero $H(t) = 1_+$.

Definizione 1.16. *Un segnale è una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, nulla per valori negativi del suo argomento e trasformabile secondo Laplace,*

1.3 Trasformata inversa di Laplace.

Si può dimostrare che, data una trasformata di Laplace $F(p)$, è unica la funzione $f(x)$ tale che $\mathcal{L}[f] = F$. L'operazione che permette di passare da F ad f si chiama inversione della trasformata di Laplace ed $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$, si chiama antitrasformata di F.

Esempio 1.17. i) *Se $F(p) = \frac{2}{p+3}$, allora $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+3}\right](x) = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+3}\right](x) = 2H(x)e^{-3x}$*

ii) *Se $F(p) = \frac{1}{(p-2)^2+9}$, allora $\mathcal{L}^{-1}[F](x) = e^{2x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+9}\right](x) = \frac{1}{3}\sin(3x)e^{2x}H(x)$*

1.4 Equazioni differenziali ordinarie.

Esempio 1.18. *Applicando la trasformata di Laplace al problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

si ottiene

$$(p^2 + 2p + 5)Y(p) = 2p \longrightarrow Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 2p + 5}$$

Risulta $p^2 + 2p + 5 = (s+1)^2 + 4 = (s+1)^2 + 2^2$ e dunque

$$Y(p) = \frac{2p}{p^2 + 2p + 5} = 2\frac{p+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

In base alla linearità della trasformata e all'esempio 1.15, si ottiene

$$y(t) = 2e^{-t}\cos(2t) - e^{-t}\sin(2t) = (2\cos(2t) - \sin(2t))e^{-t}$$

Il segnale ottenuto descrive delle oscillazioni smorzate dal fattore e^{-t}.

2 Trasformata di Fourier.

2.1 Definizioni e esempi.

Definizione 2.1. *Sia f una funzione di variabile reale, tale che*

i) $f \in C^1([-a,a])$, *con* $[-a,a]$ *intervallo limitato;*

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$, *cioè* $f(x)$ *sia assolutamente integrabile da* $-\infty$ *a* $+\infty$.

La trasformata di Fourier di f è la funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita dalla formula

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x}\, dx \tag{4}$$

Proposizione 2.2. *In ogni punto in cui f è continua si ha*

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x}\, dx \text{ se e solo se } f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x}\, d\nu$$

Proposizione 2.3. *$\hat{f}(\nu)$ è continua e risulta*

$$\lim_{|\nu| \to +\infty} \hat{f}(\nu) = 0 \tag{5}$$

Esempio 2.4. *La funzione caratteristica di un intervallo:*

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 \text{ se } x \in [a,b] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

La trasformata di Fourier risulta

$$\hat{f}(\nu) = \int_a^b e^{-i2\pi\nu x}\, dx = \begin{cases} \frac{e^{-i2\pi\nu a} - e^{-i2\pi\nu b}}{i2\pi\nu} \text{ se } \nu \neq 0 \\ \\ b - a \text{ se } \nu = 0 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione continua di ν e infinitesima all'infinito; infatti

$$\lim_{\nu \to 0} \hat{f}(\nu) = b - a \qquad e \qquad |\hat{f}(\nu)| \leq \frac{1}{|\pi\nu|}$$

In particolare, per un impulso relativo all'intervallo $[-a,a]$, cioè la funzione caratteristica dello stesso intervallo

$$f_a(x) = \chi_{[-a,a]}(x) := \begin{cases} 1 \text{ se } |x| \leq a \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

si ha

$$\hat{f}_a(\nu) = \frac{e^{-i2\pi\nu a} - e^{-i2\pi\nu a}}{2i\pi\nu} = 2\frac{\sin(a2\pi\nu)}{2\pi\nu} = 2a\frac{\sin(a2\pi\nu)}{a2\pi\nu}$$

Esempio 2.5. *Dall'esercizio precedente si ha la funzione*

$$Af_a(x) = A\chi_{[-a,a]}(x) := \begin{cases} A \text{ se } |x| \leq a \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

si ha $\widehat{Af_a}(\nu) = 2Aa\frac{\sin(a2\pi\nu)}{a2\pi\nu}$. Il prodotto $2Aa$ rappresenta l'area sottesa dagli impulsi; mantenento costantemente pari a 1 questo prodotto e facendo tendere a al valore 0, quindi A tende a $+\infty$, questi impulsi tendono all'impulso di Dirac δ; la trasformata di Fourier tende a 1. Quindi

$$\hat{\delta} = 1$$

Esercizio 1. *Calcolare la trasformata di Fourier* $\hat{f}(\nu)$ *dove*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione 2.6. *Si osservi che*

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\ dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\ dx \qquad (6)$$

quindi,

- *se* f *è pari si ha* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\ dx = 0$ *e* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\ dx$
- *se* f *è dispari si ha* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\ dx = 0$ *e* $-i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\ dx = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\ dx$

2.2 Proprietà .

Proposizione 2.7. *Siano* f_1 *e* f_2 *due funzioni con trasformate di Fourier* $\hat{f}_1$ *e* $\hat{f}_2$*; se* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$*, si ha*

$$c_1\widehat{f_1 + c_2}f_2 = c_1\hat{f}_1 + c_2\hat{f}_2.$$

Proposizione 2.8. *Se* $g(x) = f(ax - b)$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$*, allora*

$$\hat{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax - b)e^{-i2\pi\nu x}\ dx = \frac{1}{|a|}e^{-i2\pi\nu\frac{b}{a}}\hat{f}(\frac{\nu}{a}) \qquad (7)$$

Esempio 2.9. *Sia*

$$f(x) := \begin{cases} 1/T \text{ se } |x - x_0| \leq T/2 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Allora

$$\hat{f}(\nu) = e^{-2\pi i\nu x_0}\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}$$

Si ha $\lim_{T\to 0} f(x) = \delta(x - x_0)$ *e quindi*

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)](\nu) = e^{-2\pi i\nu x_0} \qquad (8)$$

Teorema 2.10. *Sia* f *derivabile; se* $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = 0$*, allora si ha*

$$\mathcal{F}[f'](\nu) = 2\pi i\nu\hat{f}(\nu)$$

iterando

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\nu) = (2\pi i\nu)^n\hat{f}(\nu)$$

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\nu) = (\frac{i}{2\pi})^n\hat{f}^{(n)}(\nu)$$

Per $f = f(x, y)$ *si ha* $\mathcal{F}(\frac{\partial f}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(f)$*.*

Proposizione 2.11. *Siano* f *e* g *funzioni definite in* $\mathbb{R}$ *e*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)\ dy$$

il loro prodotto di convoluzione; allora

$$\mathcal{F}[f * g](\nu) = \hat{f}(\nu) \cdot \hat{g}(\nu) \qquad (9)$$

Esempio 2.12. *Se* $g(x) = \delta(x)$ *si ha* $\mathcal{F}[f * \delta] = \mathcal{F}[f]$ *ovvero* $(f * \delta)(x) = f(x)$*.*
Se $g(x) = \delta(x - x_0)$ *si ha, ricordando (7) e (8),*

$$\mathcal{F}[f * \delta(x - x_0)](\nu) = e^{-2\pi i\nu x_0}\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}[f(x - x_0)](\nu)$$

ovvero $f * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$*.*

2.3 Equazioni differenziali.

Sia dato il problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad |u(x,t)| < M, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0.$$

Prendendo la trasformata di Fourier rispetto a x di entrambi i membri dell'equazione differenziale assegnata, si ha

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[u] = -k(2\pi\nu)^2\mathcal{F}[u] \tag{10}$$

L'equazione differenziale ordinaria (10) ha soluzione

$$\mathcal{F}[u] = Ce^{-k(2\pi\nu)^2 t} \text{ ovvero } \mathcal{F}[u(x,t)] = Ce^{-k(2\pi\nu)^2 t} \tag{11}$$

da cui, per $t = 0$, si ha $\mathcal{F}[u(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)] = C$ quindi

$$\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[f]e^{-k(2\pi\nu)^2 t}$$

Risulta

$$e^{-k(2\pi\nu)^2 t} = \mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{1}{4\pi kt}}e^{-(x^2/4kt)}\right]$$

quindi

$$u(x,t) = f(x) * \sqrt{\frac{1}{4\pi kt}}e^{-(x^2/4kt)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(w)\sqrt{\frac{1}{4\pi kt}}e^{-[(x-w)^2/4kt]}\, dw$$

Considerando la trasformazione $z^2 = (x-w)^2/4kt$ si ha finalmente

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} f(x - 2z\sqrt{kt})\, dz$$

Il problema studiato è la determinazione della temperatura di una sbarra sottile e infinita; la superficie di questa è isolata, la temperatura iniziale è pari a $f(x)$.

3 Appendice

Definizione 3.1. *Sia $f : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua; si ponga*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{+b} f(x)\, dx \tag{12}$$

L'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ si dice:

- *convergente se il limite in (12) esiste finito; in tal caso si dice anche che f è integrabile in $[a,+\infty)$;*
- *divergente se il limite in (12) risulta pari a $+\infty$ oppure a $-\infty$;*
- *che non esiste se il limite in (12) non esiste*

Proposizione 3.2. *Siano $f,\ g : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue; tali che $0 \le f \le g$ in $[a,+\infty)$; risulta che se $g(x)$ è integrabile, allora anche f è integrabile.*

Definizione 3.3. *Sia E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi, con $f(x) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$, con $f_1, f_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$. La funzione f si dice sommabile se tali sono f_1 e f_2 ed inoltre risulta che f è sommabile se e solo se $|f|$ è sommabile.*