Soluzioni degli esercizi del corso di Analisi Matematica I

Roberta Bianchini

(Prof. Pierpaolo Natalini)

6 dicembre 2017

1. Provare la seguente disuguaglianza:

$$\ln(1+\cos(x)) + \frac{x^2}{4} \leq \ln 2, -\pi < x < \pi.$$

2. Determinare l'espressione esplicita e l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \max(\arctan(x), x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Stabilire l'invertibilità della funzione $g(x) = x + f(x)$ e determinare l'insieme di derivabilità della funzione inversa g^{-1}. Calcolare

$$\frac{dg^{-1}}{dy}\,(-1-\pi/4)\,.$$

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-2x-3|+|\ln(-x)|}{|x+1|} & \text{se } x \in (-3,0) \setminus \{-1\} \\ \alpha & \text{se } x = -1 \end{cases}.$$

Determinare il valore da assegnare al parametro reale α affinché f risulti continua in $(-3,0)$. Per tale valore di α determinare l'insieme di derivabilità.

4. Dimostrare o confutare (giustificando la risposta) la seguente affermazione: sia $c = \sup A$ con A illimitato inferiormente; allora $\forall \varepsilon > 0$ si ha $c - \varepsilon \in A$.

SVOLGIMENTO

1. Per provare la disuguaglianza, possiamo definire la funzione

$$f(x) = \ln(1 + \cos(x)) + \frac{x^2}{4} - \ln 2$$

Se riusciamo a verificare che $f(x) \leq 0$ per $x \in (-\pi, \pi)$ abbiamo dimostrato automaticamente la disuguaglianza.

In effetti

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}(-\sin(x)) + \frac{x}{2}$$

ed

$$f''(x) = \frac{-1 + \cos(x)}{2(1 + \cos(x))}$$

Allora $f''(x) \leq 0$ per $x \in (-\pi, \pi)$, perché $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e si annulla solo per $x = 0$. Dunque $f'(x)$ è una funzione decrescente per $x \in (-\pi, \pi)$. Notando che $f'(0) = 0$ possiamo dire che 0 è punto massimo assoluto di f in $(-\pi, \pi)$. $f(0) = 0$, quindi $f(x) \leq 0$ per $x \in (-\pi, \pi)$ e la disuguaglianza è provata.

2. Per ogni punto x, la funzione $\max(x, \arctan(x))$ associa x, se $x \geq \arctan(x)$, mentre associa $\arctan(x)$ se $x < \arctan(x)$. Possiamo definire la funzione $h(x) = x - \arctan(x)$. Notiamo che $h(0) = 0$, inoltre

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$$

Dunque $h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione $h(x)$ è crescente per $x \in \mathbb{R}$. Quindi, in particolare, $h(x) > 0, x \in \mathbb{R}^+$ e $h(x) < 0, x \in \mathbb{R}^-$. Quindi $x > \arctan(x), x \in \mathbb{R}^+$ e $x < \arctan(x), x \in \mathbb{R}^-$. Dunque

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Innanzitutto notiamo che la funzione e' continua in 0 e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; inoltre essa risulta derivabile anche in 0 poiché f è continua e

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$$

Dunque $D_{f'} = \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Passiamo ora alla funzione $g(x) = x + f(x)$. Dalla scrittura di prima possiamo scrivere

$$g(x) = f(x) + x = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(x) + x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La bisettrice del primo quadrante è monotòna crescente; dalla forma di prima ci accorgiamo anche che $f(x)$ è una funzione crescente, di conseguenza anche $g(x)$, essendo somma di funzioni crescenti, è una funzione crescente. Dunque è invertibile nel suo dominio. Il dominio della funzione inversa è il codominio di $g(x)$. Dunque $D_{g^{-1}} = C_g = \mathbb{R}$. D'altronde

$$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = \lim_{x \to 0^-} g'(x) = 2$$

e

$$g'(x) = f'(x) + 1 = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $D_{(g^{-1})'} = D_{g^{-1}}$ e

$$\frac{dg^{-1}}{dy}(-1 - \pi/4) = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{1 + 1/2} = 2/3$$

infatti per il Teorema di derivazione della funzione inversa l'equazione

$$-1 - \frac{\pi}{4} = x + f(x)$$

ha come unica soluzione $x = -1$.

3. Osserviamo dallo studio del segno delle funzioni all'interno dei tre moduli che

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{se } x \in (-1, 0) \\ (x-3)(x+1) & \text{se } x \in (-3, -1) \end{cases}$$

$$|\ln(-x)| = \begin{cases} -\ln(-x) & \text{se } x \in (-1, 0) \\ \ln(-x) & \text{se } x \in (-3, -1) \end{cases}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in (-1, 0) \\ -x - 1 & \text{se } x \in (-3, -1) \end{cases}$$

Quindi se $x \in (-1, 0)$ allora per esplicitare il modulo dobbiamo cambiare segno al numeratore e lasciare invariato quello del denominatore, mentre se $x \in (-3,-1)$ allora dobbiamo cambiare segno al denominatore e lasciare invariato quello del numeratore. In entrambi i casi, quindi, l'espressione della funzione è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3+\ln(-x)}{-x-1} & \text{se } x \in (-3,0) \setminus \{-1\} \\ \alpha & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Affinché la funzione sia continua nel punto -1, dobbiamo imporre

$$\alpha = \lim_{x \to -1} f(x)$$

Applicando il Teorema di De l'Hospital possiamo dire che

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x - 2 + 1/x}{-1} = 5$$

Concludiamo che per $\alpha = 5$ la funzione $f(x)$ risulta essere continua anche nel punto -1. Sia quindi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3+\ln(-x)}{-x-1} & \text{se } x \in (-3,0) \setminus \{-1\} \\ 5 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

L'unico punto in cui potrebbe non esistere la derivata nell'intervallo $(-3,0)$ è il punto -1. Ma calcolando prima

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 2 - 1/x + \ln(-x)}{(x+1)^2}$$

e applicando due volte il Teorema di De l'Hospital scopriamo che

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-2x - 2 + 1/x^2 + 1/x}{2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-2 - 2/x^3 - 1/x^2}{2} = -1/2$$

Quindi per $\alpha = 5$ la funzione $f(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $(-3,0)$. In particolare $f'(-1) = -1/2$.

4. L'affermazione è FALSA. Un controesempio è l'insieme

$$A = (-\infty, 0) \cup \{1\}$$

Infatti il $\sup A = 1$ ed $\exists \varepsilon > 0 \mid 1 - \varepsilon \notin A$, ad esempio $\varepsilon = 1/2$.