UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA II
Dipartimento di Ingegneria Elettronica - 22 luglio 2019

Cognome e nome ____

Acconsento al trattamento dei miei dati per le attività connesse. Firma ______________________

1. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{1+ke^{x}}$.

2. Determinare l'equazione differenziale lineare non omogenea del 2° ordine a coefficienti costanti che ammette le seguenti tre soluzioni particolari: $\overline{y}_1 = e^x - xe^x$, $\overline{y}_2 = e^{2x} - xe^x$, $\overline{y}_3 = e^x + e^{2x} - xe^x$.

3. Sia $F(s) = \frac{s^2+5}{2s^3-12s^2+18s}$. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$.

4. Calcolare $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ dove D è il dominio del 1 quadrante, delimitato dall'asse delle ordinate e dalla circonferenza di eq. $x^2+y^2-2y=0$.

Soluzioni

1. E' una serie di funzioni positive $\forall x \in \mathrm{R} - \{0\}$. La serie converge puntualmente nell'origine. Fissato $x \in \mathrm{R} - \{0\}$, dal criterio del rapporto si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{x^{2k+2}}{1+(k+1)e^x}\frac{1+ke^x}{x^{2k}} = x^2 .$$

Quindi la serie converge puntualmente nei punti $x \in \mathrm{R}$ tali che $x^2 < 1$, cioè nell'intervallo $(-1,1)$, mentre nei punti $x \in \mathrm{R}$ tali che $x^2 > 1$, cioè negli intervalli $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$ la serie diverge. Verifichiamo, direttamente, la convergenza puntuale in -1 e 1; per $x=\pm 1$, le serie numeriche corrispondenti $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+ke^{\pm1}}$ divergono perché asintoticamente equivalenti (a meno di costanti) alla serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. L'insieme di convergenza puntuale della serie è allora l'intervallo $(-1,1)$.

Essendo, $\forall k \in \mathrm{N}$, le funzioni $\frac{x^{2k}}{1+ke^x}$ continue in $[-1,1]$, non si ha convergenza uniforme su $(-1,1)$. Inoltre, $\forall a \in (0,1)$, si ha

$$\sup_{x\in[-a,a]}\frac{x^{2k}}{1+ke^x} = \frac{(-a)^{2k}}{1+ke^{-a}} = \frac{a^{2k}}{1+ke^{-a}} .$$

Dalla convergenza della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{2k}}{1+ke^{-a}}$ segue la convergenza totale su $[-a,a]$ della serie di funzioni e quindi quella uniforme sullo stesso intervallo.

2. L'equazione differenziale è del tipo $y''+ay'+by=f(x)$ o, in forma compatta, $L[y]=f(x)$. Dalla linearità dell'equazione si ha che le funzioni $\overline{y}_3-\overline{y}_1=e^{2x}$ e $\overline{y}_3-\overline{y}_2=e^x$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione diff. lineare omogenea $L[y]=0$. Quindi le costanti 2 e 1 sono soluzioni dell'eq. caratteristica associata $(\alpha-1)(\alpha-2)=0$, da cui si ricava l'equazione diff. lineare omogenea $y''-3y'+2y=0$. La funzione $f(x)$ si determina per sostituzione mediante una qualsiasi delle tre soluzioni particolari ottenendo $f(x)=e^x$.

3. Si ha $F(s)=\dfrac{s^2+5}{2s(s^2-6s+9)}=\dfrac{s^2+5}{2s(s-3)^2}$. Scomponendo in fratti semplici si ottiene

$$\frac{s^2+5}{2s(s-3)^2}=\frac{A}{2s}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{(s-3)^2}=\frac{(A+2B)s^2+(-6A-6B+2C)s+9A}{2s(s-3)^2}$$

e quindi $\begin{cases} A+2B=1 \\ -6A-6B+2C=0 \\ 9A=5 \end{cases}$, da cui $A=\dfrac{5}{9}$, $B=\dfrac{2}{9}$ e $C=\dfrac{5}{3}$.

Dalla proprietà di linearità dell'antitrasformata si ha

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{5}{18}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]+\frac{7}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right].$$

Sfruttando le tabelle otteniamo

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{5}{18}+\frac{2}{9}e^{3t}+\frac{7}{3}te^{3t}.$$

4. *D* è il semicerchio, giacente nel 1 quadrante, di centro $(0,1)$ e raggio unitario. Per non complicare il calcolo dell'integrale utilizziamo il seguente cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases}, \text{ con } \vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ e } \rho\in[0,\rho_{\max}].$$

Per determinare l'estremo $\rho_{\max}$, consideriamo l'eq. polare della circonferenza di eq. cartesiana $x^2+y^2-2y=0$, cioè $\rho=2\sin\vartheta$. Si ha quindi $\rho_{\max}=2\sin\vartheta$. Allora

$$\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{\pi/2}d\vartheta\int_0^{2\sin\vartheta}\rho^3\cos\vartheta d\rho=4\int_0^{\pi/2}\sin^4\vartheta\cos\vartheta d\vartheta=\frac{4}{5}.$$