UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA TRE
Prova d'esame di Analisi Matematica 1
7 febbraio 2024

1. Determinare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \left|\frac{|x+2|+1}{x+3}\right|$ e, quindi, l'espressione esplicita della derivata prima.
2. Determinare il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{4/5}-1-\frac{4}{5k}\right]$. (Utilizzare la formula di MacLaurin $(1+h)^{\alpha}=1+\alpha h+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2+o\left[h^2\right]$ per $h\to 0$)
3. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x\to 0^+$, della funzione $f(x)=\frac{\left(e^{x^2}-1\right)x-x^3}{x\left(\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)}$.
4. Determinare la primitiva della funzione $f(x)=\frac{x}{|x-1|-2}$ che si annulla nell'origine.

Svolgimento

1. $D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$. La funzione è continua nel suo dominio. Esplicitando il modulo interno si ha

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq -2\\ \left|\dfrac{x+1}{x+3}\right| & \text{se } x<-2\wedge x\neq -3\end{cases}.$$

Esplicitando il modulo nella seconda espressione si ha

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\geq -2\\ -\dfrac{x+1}{x+3} & \text{se } -3<x<-2\\ \dfrac{x+1}{x+3} & \text{se } x<-3\end{cases}.$$

L'unico punto critico per la derivabilità è $x=-2$. Si ha, $\forall x\neq -2$

$$f'(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x>-2\\ -\dfrac{2}{(x+3)^2} & \text{se } -3<x<-2\\ \dfrac{2}{(x+3)^2} & \text{se } x<-3\end{cases}.$$

Dallo studio dei limiti $\lim_{x\to -2^-} f'(x)=-2$ e $\lim_{x\to -2^+} f'(x)=0$ si ottiene $D_{f'}=D_f-\{-2\}$.

2. Dalla formula di MacLaurin $(1+h)^\alpha = 1+\alpha h+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2+o\left[h^2\right]$ per $h\to 0$, si ottiene, ponendo $h=\dfrac{1}{k}$, $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^\alpha = 1+\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2k^2}+o\left[\dfrac{1}{k^2}\right]$ per $k\to+\infty$.

Quindi il termine generico della serie si può esprimere al seguente modo

$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{4/5}-1-\dfrac{4}{5k}=-\dfrac{2}{25k^2}+o\left[\dfrac{1}{k^2}\right]$ e quindi, a meno di una costante, $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{4/5}-1-\dfrac{4}{5k}\sim\dfrac{1}{k^2}$ per $k\to+\infty$, da cui segue la convergenza della serie numerica.

3. Dalle formule di Mac Laurin $e^t = 1+t+\dfrac{t^2}{2}+o\left[t^2\right]$ e $\sin t = t-\dfrac{t^3}{6}+o\left[t^3\right]$ per $t\to 0$ si ottengono:

ponendo $t=x^2$, $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o\left[x^4\right]$; e ponendo $t=\sqrt{x}$, $\sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{6}+o\left[x^{3/2}\right]$ per $x\to 0^+$. Quindi si ha $\dfrac{\left(e^{x^2}-1\right)x-x^3}{x\left(\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)}=\dfrac{\dfrac{x^5}{2}+o\left[x^5\right]}{\dfrac{x^{5/2}}{6}+o\left[x^{5/2}\right]}=x^{5/2}\dfrac{\dfrac{1}{2}+o[1]}{\dfrac{1}{6}+o[1]}$, da cui si deduce l'ordine di infinitesimo pari a 5/2.

4. La primitiva richiesta si può esprimere in forma integrale come $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. La funzione integranda è $f(t)=\dfrac{t}{|t-1|-2}=\begin{cases}\dfrac{t}{t-3} & \text{se } t\geq 1\wedge t\neq 3\\[2ex] \dfrac{-t}{t+1} & \text{se } t<1\wedge t\neq -1\end{cases}$. La primitiva *F* è allora definita nell'intervallo $(-1,3)$.

Se $x\in(-1,1)$ si ha $F(x)=\int_0^x \dfrac{-t}{t+1}\,dt=-x+\ln|x+1|$.

Se $x\in[1,3)$ si ha $F(x)=\int_0^1\dfrac{-t}{t+1}\,dt+\int_1^x\dfrac{t}{t-3}\,dt=x+3\ln|x-3|-2\ln 2-2$. Quindi

$$F(x)=\begin{cases}\ln|x+1|-x & \text{se } x\in(-1,1)\\ 3\ln|x-3|+x-2-2\ln 2 & \text{se } x\in[1,3)\end{cases}$$

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA TRE
Prova d'esame di Analisi Matematica 1
7 febbraio 2024

1. Determinare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \left|\frac{|x+1|+2}{x+3}\right|$ e, quindi, l'espressione esplicita della derivata prima.

2. Determinare il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{2}{3k}-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2/3}\right]$. (Utilizzare la formula di MacLaurin $(1+h)^{\alpha} = 1+\alpha h+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2+o\left[h^2\right]$ per $h \to 0$)

3. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione $f(x) = \frac{x^3+\left(1-e^{x^2}\right)x}{x(\sqrt{x}-\sin\sqrt{x})}$.

4. Determinare la primitiva della funzione $f(x) = \frac{x}{|x+1|-2}$ che si annulla nell'origine.

Svolgimento

1. $D_f = \mathbb{R}-\{-3\}$. La funzione è continua nel suo dominio. Esplicitando il modulo interno si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \left|\dfrac{-x+1}{x+3}\right| & \text{se } x < -1 \wedge x \neq -3 \end{cases}.$$

Esplicitando il modulo nella seconda espressione si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \dfrac{-x+1}{x+3} & \text{se } -3 < x < -1 \\ \dfrac{x-1}{x+3} & \text{se } x < -3 \end{cases}.$$

L'unico punto critico per la derivabilità è $x = -1$. Si ha, $\forall x \neq -1$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > -1 \\ -\dfrac{4}{(x+3)^2} & \text{se } -3 < x < -1 \\ \dfrac{4}{(x+3)^2} & \text{se } x < -3 \end{cases}.$$

Dallo studio dei limiti $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -1$ e $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 0$ si ottiene $D_{f'} = D_f - \{-1\}$.

2. Dalla formula di MacLaurin $\left(1+h\right)^{\alpha}=1+\alpha h+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}h^2+o\left[h^2\right]$ per $h\to 0$, si ottiene, ponendo $h=\frac{1}{k}$, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{k}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2k^2}+o\left[\frac{1}{k^2}\right]$ per $k\to+\infty$.

Quindi il termine generico della serie si può esprimere al seguente modo

$1+\frac{2}{3k}-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2/3}=\frac{1}{9k^2}+o\left[\frac{1}{k^2}\right]$ e quindi, a meno di una costante, $1+\frac{2}{3k}-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2/3}\sim\frac{1}{k^2}$ per $k\to+\infty$, da cui segue la convergenza della serie numerica.

3. Dalle formule di Mac Laurin $e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o\left[t^2\right]$ e $\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o\left[t^3\right]$ per $t\to 0$ si ottengono: ponendo $t=x^2$, $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o\left[x^4\right]$; e ponendo $t=\sqrt{x}$, $\sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{6}+o\left[x^{3/2}\right]$ per $x\to 0^+$. Quindi si ha $\frac{x^3+\left(1-e^{x^2}\right)x}{x\left(\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)}=\frac{-\frac{x^5}{2}+o\left[x^5\right]}{\frac{x^{5/2}}{6}+o\left[x^{5/2}\right]}=x^{5/2}\frac{-\frac{1}{2}+o[1]}{\frac{1}{6}+o[1]}$, da cui si deduce l'ordine di infinitesimo pari a 5/2.

4. La primitiva richiesta si può esprimere in forma integrale come $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$. La funzione integranda è $f\left(t\right)=\frac{t}{|t+1|-2}=\begin{cases}\frac{t}{t-1} & \text{se } t\geq -1\wedge t\neq 1\\ \frac{-t}{t+3} & \text{se } t<-1\wedge t\neq -3\end{cases}$. La primitiva *F* è allora definita nell'intervallo $\left(-3,1\right)$.

Se $x\in\left(-3,-1\right)$ si ha $F\left(x\right)=\int_0^{-1}\frac{t}{t-1}dt+\int_{-1}^{x}\frac{-t}{t+3}dt=3\ln|x+3|-x-2-2\ln 2$.

Se $x\in\left[-1,1\right)$ si ha $F\left(x\right)=\int_0^x\frac{t}{t-1}dt=x+\ln|x-1|$. Quindi

$$F\left(x\right)=\begin{cases}3\ln|x+3|-x-2-2\ln 2 & \text{se } x\in\left(-3,-1\right)\\ x+\ln|x-1| & \text{se } x\in\left[-1,1\right)\end{cases}$$