

Soluzioni.

1. Risolvere il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(x) - xy(x) = x^3 y^2(x); \\ y(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Abbiamo l'equazione differenziale $y'(x) - xy(x) = x^3 y^2(x)$, che è un'equazione di Bernoulli. La soluzione identicamente nulla $y(x) = 0$ non soddisfa la condizione iniziale.

Posto $y(x) \neq 0$, si divide per $-y^2(x)$, ottenendo $-\frac{y'(x)}{y^2(x)} + x \frac{1}{y(x)} = -x^3$.

Introducendo $z(x) = 1/y(x)$, per cui $z'(x) = -\frac{1}{y^2(x)} y'(x)$, si ottiene una nuova equazione lineare del primo ordine nell'incognita $z(x)$:

$$-\frac{1}{y^2(x)} y'(x) + x \frac{1}{y(x)} = -x^3 \rightarrow z'(x) + x z(x) = -x^3.$$

Poniamo $A(x) = \exp\left(\int x dx\right) = e^{x^2/2}$.

$$A(x)[z'(x) + x z(x)] = -A(x) x^3, \quad \frac{d}{dx}[z(x) e^{x^2/2}] = -x^3 \cdot e^{x^2/2}.$$

$$\begin{aligned} z(x) &= -e^{-x^2/2} \cdot \int x^3 \cdot e^{x^2/2} dx = -e^{-x^2/2} \cdot \left(x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + c\right) = \\ &= -x^2 + 2 + ce^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

$$\text{Infatti } \int x^3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int x^2 d\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + c.$$

$$\text{Quindi } \frac{1}{y(x)} = -x^2 + 2 + ce^{-x^2/2}, \quad y(x) = \frac{1}{-x^2 + 2 + ce^{-x^2/2}}.$$

Dalla condizione iniziale, $y(0) = \frac{1}{4}$, ricaviamo $4 = 2 + c$, $c = 2$.

$$\text{In definitiva, } y(x) = \frac{1}{-x^2 + 2 + 2e^{-x^2/2}}.$$

2. Sulla base della proprietà della trasformata di Laplace relativa all'integrale di $f(t)$, spiegate come ricavare da $\mathcal{L}[\sin at]$ la trasformata di $\cos at$.

$$\text{Posto } f(t) = \sin at, \quad F(s) = \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

Sappiamo che

$$\int_0^t \sin au du = -\frac{1}{a} \cos at + \frac{1}{a}$$

e che, se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, allora

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

Ricaviamo che $\mathcal{L}\left[\int_0^t \sin au \, du\right] = -\frac{1}{a} \mathcal{L}[\cos at] + \frac{1}{as} = \frac{F(s)}{s} = \frac{a}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s}$.

$$\mathcal{L}[\cos at] = -a \left(-\frac{1}{as} + \frac{a}{s^2+a^2} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s(s^2+a^2)} = \frac{s^2+a^2-a^2}{s(s^2+a^2)}$$

In conclusione, $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$.

3. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\log|x|} \right)^n$.

La serie assegnata si riconduce alla serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n$, con ragione $q = \frac{1}{1-\log|x|}$, $x \neq 0$. Si ha la convergenza quando $\left| \frac{1}{1-\log|x|} \right| < 1$, ovvero quando $|1 - \log|x|| > 1$, $(1 - \log|x| > 1) \cup (-1 + \log|x| > 1)$, ovvero $(-\log|x| > 0) \cup (\log|x| > 2)$

Deve risultare

1. $\log|x| < 0$, $|x| < 1$, $(-1 < x < 0) \cup (0 < x < 1)$
2. $\log|x| > 2$, $|x| > e^2$, $(x < -e^2) \cup (x > e^2)$.

La serie converge sui quattro intervalli $(-\infty, -e^2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(e^2, +\infty)$

Per ognuno degli intervalli trovati, la serie converge. Determiniamo la somma, ricordando che $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1$:

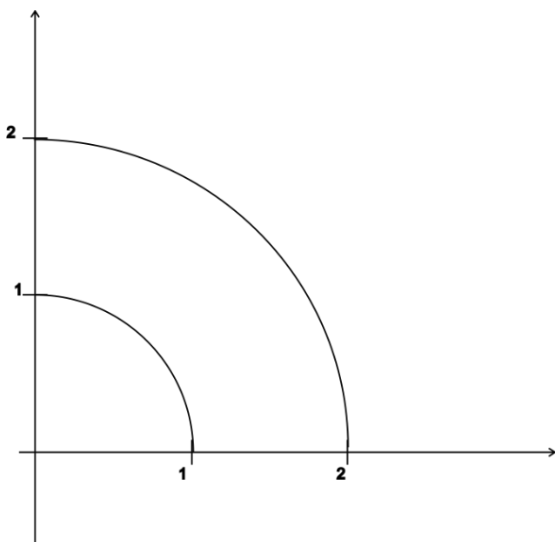
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\log|x|} \right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\log|x|} \right)^n - 1 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\log|x|}} - 1 = \frac{1-\log|x|}{1-\log|x|-1} - 1 = \frac{-1+\log|x|}{\log|x|} - 1 = \frac{-1+\log|x|-\log|x|}{\log|x|} = -\frac{1}{\log|x|}. \end{aligned}$$

4. Calcolare $\iint_D (x^2 + 2y^2) \, dx \, dy$,

ove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Si considera la trasformazione delle coordinate $\varphi(\rho, \vartheta) = \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$, $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$,

cui corrisponde lo Jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho$.



$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + 2y^2) dx dy &= \int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^2 \cos^2 \vartheta + 2 \rho^2 \sin^2 \vartheta) d\vartheta = \\
 &= \int_1^2 \rho^3 d\rho \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta) d\vartheta \right) = \int_1^2 \rho^3 d\rho \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 \vartheta) d\vartheta \right) = \\
 &= \int_1^2 \rho^3 \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) d\rho = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\rho^4}{4} \Big|_1^2 = \\
 &= \left(\frac{3\pi}{4} \right) \frac{16-1}{4} = \frac{45}{16} \pi.
 \end{aligned}$$