La stesura di queste dispense
vanta il contributo dei miei carissimi amici
Giulia 5, Matteo 2 e Francesco 3
che ringrazio.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Una ED ordinaria è una equazione in cui l'incognita è una funzione $y = y(x)$ che compare nell'equazione assieme alle sue derivate successive e alla variabile indipendente *x*. L'ED si dice ordinaria in quanto la funzione incognita *y* dipende da una sola variabile *x*. L'ED si dice di ordine *n*, se *n* è il massimo ordine di derivazione con cui compare la *y*.

Il modo più generico di scrivere una ED di ordine *n* è

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

dove *F* è una funzione (a più variabili) che esprime, a primo membro della (1.1), una relazione tra la variabile indipendente x, la variabile dipendente (funzione incognita) $y = y(x)$ e le sue derivate fino a quella di ordine *n*. Per esempio

$$2xy''' - (y')^2 + x = 0$$

è una ED di ordine 3. In questo caso si ha $F(x, y, y', y'', y''') = 2xy''' - (y')^2 + x$.

L'ED scritta nella forma (1.1) si dice in forma implicita. Qualora si riuscisse ad esplicitare l'ED rispetto alla funzione $y^{(n)}$, cioè a scriverla nella forma

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

essa si dirà espressa in forma normale.

Risolvere (o, come è meglio dire, integrare) una ED significa determinate tutte le funzioni $y = y(x)$ che sostituite all'incognita verificano l'identità. Ovviamente, poiché si tratta di funzioni, bisognerà anche stabilire il loro dominio. L'insieme di tutte le funzioni soluzione dell'ED prende il nome di integrale generale dell'ED.

Esistono varie tipologie di ED. A seconda della tipologia di una particolare ED è spesso (non sempre) possibile innescare una tecnica apposita per determinare il suo integrale generale.

Esempio 1. *Integrare l'ED* $y' = x^2$.

Si tratta di una ED del 1 ordine in forma normale. In questo caso, poiché la funzione $f(x) = x^2$, a 2 membro, dipendente solo dalla variabile *x*, l'ED rientra nel caso delle cosiddette *ED risolubili mediante integrazioni dirette*. Per questo tipo di ED il problema della ricerca dell'integrale generale è equivalente al problema (affrontato in analisi 1) della ricerca di tutte le primitive della funzione $f(x) = x^2$ nel suo dominio che, in questo caso, è l'intervallo $J = \mathbb{R}$. Infatti il problema ci chiede di determinare tutte le funzioni $y = y(x)$ che derivate coincidono con la funzione $f(x) = x^2$ su tutto *J*. Basterà allora determinare l'integrale indefinito della funzione $f(x) = x^2$ (che è l'insieme di tutte le primitive di f)
Si ha

$$y = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} + c, \ \ \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in J.$$

Dal punto di vista geometrico l'integrale generale è costituito da infinite curve nel piano (grafici di funzioni definite in $J = \mathbb{R}$) tra loro "parallele".

Esempio 2. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x\ln x} \\ y(e) = 5 \end{cases}.$$

Un problema di Cauchy è un problema in cui si richiede di integrare una ED e di determinare, tra le funzioni soluzione, quella (o quelle) che soddisfano le cosiddette condizioni iniziali. Quest'ultime sono tante quanto è l'ordine n dell'EQ e si stabiliscono fissando n+1 valori costanti x_0 (riferito alla variabile indipendente x) e $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ (riferite rispettivamente alla variabile dipendente incognita y e alle sue derivate successive fino all'ordine n-1) e imponendo le condizioni che devono essere verificate dall'integrale generale dell'ED e dalle rispettive derivate successive.

Un generico problema di Cauchy si scrive nel modo seguente

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Per risolvere il problema di Cauchy dell'esercizio si può utilizzare uno dei seguenti due procedimenti:

<u>1 procedimento</u>

Si determina prima l'integrale generale dell'ED.

$$y = \int \frac{1}{x\ln x}dx \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} \ln|\ln x| + c_1 & \text{se } x \in (0,1) \\ \ln|\ln x| + c_2 & \text{se } x \in (1,+\infty) \end{cases} \quad , \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

cioè

$$y = \begin{cases} \ln(-\ln x) + c_1 & \text{se } x \in (0,1) \\ \ln(\ln x) + c_2 & \text{se } x \in (1,+\infty) \end{cases}, \ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché nella condizione iniziale si ha $x_0 = e \in (1,+\infty)$, bisogna considerare solo la famiglia di funzioni definite nell'intervallo $J = (1,+\infty)$. Imponendo ora la condizione iniziale si ha

$$y_0 = \ln(\ln x_0) + c_2 \quad \Rightarrow \quad 5 = \ln(\ln e) + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 5.$$

Quindi il problema di Cauchy ammette un unico integrale $y = \ln(\ln x) + 5$ definito nell'intervallo *J*. Dal punto di vista geometrico la soluzione del problema di Cauchy è la curva (tra le infinite dell'integrale generale) passante per il punto del piano di coordinate $(x_0, y_0) = (e, 5)$.

<u>2 procedimento</u>

Usando la notazione di Leibniz l'ED si può anche scrivere $\dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{1}{x\ln x}$.

Siccome il problema equivale a determinare, tra l'integrale generale, quella (o quelle) particolare funzione primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ che vale y_0 (cioè 5) nel punto x_0 (cioè e), si integra membro a membro l'eq. nel seguente modo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t \ln t} dt, \tag{1.2}$$

ottenendo

$$y - y_0 = \ln(\ln x) - \ln(\ln e) \quad \Rightarrow \quad y = \ln(\ln x) + 5, \quad \forall x \in J = (1, +\infty).$$

Osservazione: sostituendo la variabile di integrazione t con una nuova variabile s mediante la relazione $s = y(t)$, l'integrale a primo membro della (1.2) si può scrivere in modo equivalente

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{y_0}^{y} ds,$$

infatti, se $t = x_0 \Rightarrow s = y(x_0) = y_0$, $t = x \Rightarrow s = y(x) = y$ e $ds = \frac{dy}{dt}(t)\, dt$.

Dal punto di vista pratico conviene sfruttare questa osservazione.

Esempio 3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x \ln x} \\ y\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \end{cases}.$$

1 procedimento

Si determina prima l'integrale generale dell'ED.

$$y = \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} \ln(-\ln x) + c_1 & \text{se } x \in (0,1) \\ \ln(\ln x) + c_2 & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché nella condizione iniziale si ha $x_0 = \frac{1}{e^2} \in (0,1)$, bisogna considerare solo la famiglia di funzioni definite nell'intervallo $J = (0,1)$. Imponendo ora la condizione iniziale si ha

$$y_0 = \ln(-\ln x_0) + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln 6 = \ln\left(-\ln \frac{1}{e^2}\right) + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$$

Quindi il problema di Cauchy ammette un unico integrale $y = \ln(-\ln x) + \ln 3$ definito nell'intervallo $J = (0,1)$. Dal punto di vista geometrico la soluzione del problema di Cauchy è la curva (tra le infinite dell'integrale generale) passante per il punto del piano di coordinate $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{e^2}, \ln 6\right)$.

2 procedimento

Integriamo membro a membro l'eq.

$$\int_{\ln 6}^{y} ds = \int_{\frac{1}{e^2}}^{x} \frac{1}{t \ln t} dt$$

ottenendo

$$y - \ln 6 = \ln(-\ln x) - \ln 2 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(-\ln x) + \ln 3, \quad \forall x \in J = (0,1).$$

Esempio 4. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' = \sin x \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}.$$

<u>1 procedimento</u>
Si determina prima l'integrale generale dell'ED. Occorre integrare due volte (in generale se l'ED è di ordine n occorre integrare n volte). Una prima integrazione da come risultato

$$y' = \int \sin x \, dx \quad \Rightarrow \quad y' = -\cos x + c_1, \quad \forall c_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

Integrando ulteriormente si ottiene

$$y = \int (-\cos x + c_1) \, dx \quad \Rightarrow \quad y = -\sin x + c_1 x + c_2, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

Le costanti arbitrarie dell'integrale generale devono essere tante quanto l'ordine dell'ED. Determiniamo le soluzioni che verificano le condizioni iniziali. Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_0 = -\sin x_0 + c_1 x_0 + c_2 \\ y_0' = -\cos x_0 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\sin \pi + c_1 \pi + c_2 \\ 0 = -\cos \pi + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \pi + c_2 \\ 0 = 1 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 + \pi \\ c_1 = -1 \end{cases}.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy è $y = -\sin x - x + 1 + \pi$, $\quad \forall x \in J = \mathbb{R}$.

<u>2 procedimento</u>
Integro membro a membro una prima volta nel seguente modo

$$\int_0^{y'} ds = \int_\pi^x \sin t \, dt \quad \Rightarrow \quad y' = -\cos x - 1, \quad \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

Integro ulteriormente nel seguente modo

$$\int_1^{y} ds = \int_\pi^x (-\cos t - 1) \, dt \quad \Rightarrow \quad y = -\sin x - x + 1 + \pi, \quad \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

Esempio 5. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' = x e^{-x^2} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}.$$

<u>utilizziamo il 2 procedimento</u>
Integro membro a membro una prima volta nel seguente modo

$$\int_2^{y'} ds = \int_0^x t e^{-t^2} \, dt \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{5}{2}, \quad \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

Integro ulteriormente nel seguente modo

$$\int_1^{y} ds = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{-t^2} - 5\right) dt \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} A(x) + \frac{5}{2} x + 1, \quad \forall x \in J = \mathbb{R},$$

dove $A(x)$ è la funzione integrale $A(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ che ovviamente vale 0 in $x_0=0$. Non potendo calcolare l'espressione esplicita di $A(x)$, la soluzione si esprime in termini di una funzione integrale.

Esempio 6. *Risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' = e^{-x^2} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}.$$

Integro membro a membro una prima volta nel seguente modo

$$\int_2^{y'} ds = \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \Rightarrow \quad y' = A(x)+2, \quad \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

dove $A(x)$ è la funzione integrale $A(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ che ovviamente vale 0 in $x_0=0$.

Integro ulteriormente nel seguente modo

$$\int_1^{y} ds = \int_0^x \left(A(t)+2\right)dt \quad \Rightarrow \quad y = \int_0^x A(t)\,dt + 2x+1, \quad \forall x \in J = \mathbb{R}.$$

Calcoliamo la funzione integrale $\int_0^x A(t)\,dt$ esprimendola in termini di $A(x)$. Integrando per parti si ha

$$\int_0^x A(t)\,dt = tA(t)\Big|_0^x - \int_0^x tA'(t)\,dt = xA(x) - \int_0^x te^{-t^2}\,dt = xA(x)+\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^x = xA(x)+\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y = xA(x)+\frac{1}{2}e^{-x^2}+2x+\frac{1}{2}, \quad \forall x \in J = \mathbb{R}$.

ED lineari di ordine qualsiasi

La più generica equazione differenziale lineare di ordine *n* si scrive come

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{2.1}$$

dove le funzioni $a_0(x), a_1(x), \cdots a_n(x)$ sono dette coefficienti dell'ED e $f(x)$ termine noto.

Se $a_0(x)$ mantiene lo stesso segno (positivo o negativo nel suo dominio), allora si possono dividere entrambe i membri della (2.1) per questa funzione ed esprimere l'ED in forma normale

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

ovviamente i coefficienti e il termine noto dell'ED scritta in questa nuova forma cambiano.

Se $f(x)\equiv 0$ l'ED si dice omogenea, altrimenti si dice non omogenea.

ED lineari del primo ordine

Una ED lineare del 1 ordine non omogenea in forma normale si scrive come

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{2.2}$$

con $a(x), b(x) \in C^0(J)$ e J un intervallo.

Vediamo la tecnica per determinare l'integrale generale. Detta $p(x)$ una particolare primitiva di $a(x)$ in J, moltiplicando entrambe i membri della (2.2) per la funzione $e^{p(x)}$, si ha

$$y' e^{p(x)} + a(x) y e^{p(x)} = b(x) e^{p(x)}$$

che equivale a scrivere

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{p(x)}\right) = b(x) e^{p(x)}.$$

L'ultima equazione è equivalente all'ED iniziale; quindi la ricerca dell'integrale generale della (2.2) equivale a trovare tutte le funzioni y tali che $ye^{p(x)}$ risultano essere primitive di $b(x)e^{p(x)}$. Per fare questo basta integrare membro a membro

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{p(x)}\right)dx = \int b(x)e^{p(x)}dx \quad \Rightarrow \quad ye^{p(x)} = \int b(x) e^{p(x)} dx + c$$

da cui si ottiene l'espressione dell'integrale generale

$$y = e^{-p(x)}\left(\int b(x)e^{p(x)}dx + c\right) \quad \forall c \in \mathrm{R} \text{ e } \forall x \in J. \tag{2.3}$$

In particolare, se l'ED lineare è omogenea, cioè $b(x) = 0$, allora il suo integrale generale è, dalla (2.3), $y = ce^{-p(x)}$.

Esempio 1 Integrare l'ED $y' = y$

E' una ED lineare del primo ordine omogenea, che scritta in forma canonica diventa $y' - y = 0$. Quindi si ha $a(x) = -1$ e $b(x) = 0$. Una primitiva particolare (quella con $c = 0$) di $a(x)$ è $p(x) = -x$, quindi l'integrale generale dell'ED è $y = ce^x$, $\forall c \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in J = \mathbb{R}$.

Esempio 2 Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\ln x} \\ y(2) = 7 \end{cases}$.

L'ED del problema è lineare del primo ordine omogenea. Riscritta in forma canonica diventa $y' - \dfrac{1}{\ln x} y = 0$. Il coefficiente $a(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$ è continuo nel suo dominio $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Poiché il punto $x_0 = 2 \in J = (1,+\infty)$ la soluzione del problema sarà definita in J.

Una particolare primitiva di $a(x)$ in J è $p(x) = -\int_2^x \dfrac{1}{\ln t} dt$ (impossibile da calcolare). Quindi l'integrale generale dell'ED è $y = ce^{-p(x)}$. Dalla condizione iniziale si ha

$$y_0 = ce^{-p(x_0)} \quad \Rightarrow \quad 7 = ce^{-p(2)} \quad \Rightarrow \quad 7 = c, \text{ poiché } p(2) = 0.$$

Quindi l'unica soluzione del problema è $y = 7e^{-p(x)}$ definita in $J = (1,+\infty)$.

Esempio 3 Integrare l'ED $y' - 2xy = x^3$.

Si tratta di una ED lineare del 1 ordine non omogenea con $a(x) = -2x$ e $b(x) = x^3$. Siccome entrambe le funzioni sono continue in $J = \mathbb{R}$, l'integrale generale ha come dominio J. Una particolare primitiva di $a(x) = -2x$ è

$$p(x)=\int -2x\,dx=-x^2$$

Allora dalla formula (2.3) si ottiene

$$y=e^{x^2}\left(\int x^3e^{-x^2}dx+c\right).$$

Calcoliamo l'integrale $\int x^3e^{-x^2}dx$.

$$\int x^3e^{-x^2}dx=\int x^2xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int x^2\frac{d}{x}e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d}{dx}e^{-x^2}dx=$$
$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+c_1.$$

Quindi si ha $y=e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+c_1+c\right)$. Siccome c_1 e c sono costanti reali arbitrarie, posso considerare la loro somma come costante arbitraria che si continuerà ad indicare con la lettera c.

In definitiva l'integrale generale è dato da $y=-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+ce^{x^2}$, $\forall c\in\mathbb{R}$ e $\forall x\in J=\mathbb{R}$.

Facciamo la verifica: $y'=-x+2cxe^{x^2}$. Sostituendo l'espressione nel 1 membro dell'ED si ottiene

$$y'-2xy=-x+2cxe^{x^2}-2x\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)+ce^{x^2}\right)=-x+2cxe^{x^2}+x^3+x-2cxe^{x^2}=x^3$$

espressione che coincide con il 2 membro dell'ED.

Esempio 4 Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y'+xy=1\\ y(1)=-2\end{cases}$.

Integro prima l'ED lineare che è del 1 ordine non omogenea con $a(x)=x$ e $b(x)=1$. Siccome entrambe le funzioni sono continue in $J=\mathbb{R}$, l'integrale generale ha come dominio J. Una particolare primitiva di $a(x)=x$ è

$$p(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$$

Moltiplicando entrambe i membri dell'ED per la funzione $e^{p(x)}=e^{\frac{x^2}{2}}$ si ottiene

$$y'e^{\frac{x^2}{2}}+xye^{\frac{x^2}{2}}=e^{\frac{x^2}{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dx}\left(ye^{\frac{x^2}{2}}\right)=e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Integriamo membro a membro tenendo conto della condizione iniziale

$$\int_1^x\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{\frac{t^2}{2}}\right)dt=\int_1^x e^{\frac{t^2}{2}}dt\quad\Rightarrow\quad y(x)e^{\frac{x^2}{2}}-y(1)e^{\frac{1}{2}}=A(x)\quad\Rightarrow\quad y(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(A(x)-2\sqrt{e}\right),$$

dove $A(x)$ è la funzione integrale $A(x)=\int_1^x e^{\frac{t^2}{2}}dt$ che ovviamente vale 0 in $x_0=1$.

ED a variabili separabili

Un altro tipo di ED che si integra tramite integrazioni indefinite è costituito dalle equazioni *a variabili separabili*. Si tratta delle ED del primo ordine del tipo

$$y'=P(x)Q(y).\tag{5.1}$$

Dal punto di vista pratico, la funzione a secondo membro, la posso considerare come il prodotto di una funzione P dipendente solo da x ed un'altra funzione Q dipendente solo da y (in realtà anche la Q dipende da x, infatti essa è una funzione composta del tipo $Q(y(x))$; è come se, per la Q, si fosse fatto un cambiamento di variabile dalla x alla y con la legge $y = y(x)$). Supponiamo naturalmente che P sia continua al variare di x in un certo intervallo I e che Q sia continua al variare di y in un certo intervallo J.

Posto $Q(y) \neq 0$ la (5.1) si può scrivere in forma equivalente

$$\frac{y'(x)}{Q(y(x))} = P(x) . \tag{5.1'}$$

Integrando membro a membro si ha

$$\int \frac{y'(x)}{Q(y(x))} dx = \int P(x) dx ,$$

e, operando la sostituzione $y = y(x)$ nell'integrale a 1 membro, si ottiene

$$\int \frac{1}{Q(y)} dy = \int P(x) dx . \tag{5.1''}$$

Dal punto di vista pratico, si perviene sempre alla (5.1)'', con il seguente procedimento: si riscrive (5.1) con la notazione di Leibniz (cioè si scrive $y' = \frac{dy}{dx}$) e si interpreta "formalmente" dy/dx come se fosse un vero "quoziente". Quindi si moltiplicano entrambe i membri per dx e si dividono per $Q(y)$, ottenendo così l'uguaglianza

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) dx ,$$

i cui due membri vanno integrati il primo rispetto a y e il secondo rispetto a x, arrivando così ad ottenere l'uguaglianza (5.1)''.

Naturalmente, nel risolvere gli integrali indefiniti della (5.1)'', aggiungiamo la costante arbitraria solo a uno dei due membri. In generale l'uguaglianza che si ottiene definisce solo implicitamente l'integrale generale dell'ED, in quanto non sempre è possibile esplicitare l'uguaglianza trovata rispetto ad y.

Occorre osservare che nel primo passaggio si è diviso tutto per $Q(y)$, perciò il procedimento è lecito solo laddove la funzione $Q(y)$ non si annulla. Supponiamo ora che $Q(y)$ si annulli in un certo insieme di punti nell'intervallo J: se y_0 è uno di questi, è chiaro che la funzione costante $y = y_0$ è una particolare soluzione della (5.1), dato che la sua derivata è identicamente nulla. Perciò in generale occorrerà precisare che l'integrale generale va "completato" con un certo insieme (eventualmente infinito) di funzioni costanti, ciascuna corrispondente ad uno zero di $Q(y)$. Chiariamo tutto ciò con alcuni esempi.

ESEMPIO 1. Risolvere l'equazione differenziale $y' = 2x\sqrt{y^2+9}$.

SOLUZIONE. Procedendo come descritto sopra, abbiamo subito separando le variabili,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+9}} = 2x dx ,$$

da cui, integrando:

$$\text{settsenh}\frac{y}{3} = x^2 + c .$$

Quest'ultima uguaglianza rappresenta l'integrale generale in forma implicita. Poiché settsenh è invertibile in tutto il suo dominio, troviamo facilmente l'integrale generale $y = 3\,\text{senh}(x^2 + c)$, funzione derivabile in tutto **R** comunque si fissi la costante c.

In questo caso la funzione $Q(y)$ non ha zeri reali, per cui non si hanno soluzioni costanti in aggiunta alle funzioni dell'integrale generale.

Ricordiamo che un modo di esprimere il settsinh è $\mathrm{settsenh}t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)$.

ESEMPIO 2. Integrare l'ED $y' = 2x(y+1)(y-2)$

SOLUZIONE. Le funzioni costanti $y = 2$ e $y = -1$ definite su tutto R sono due soluzioni particolari dell'ED. Ora, posto $y \neq 2$ e $y \neq -1$, possiamo separare le variabili ed integrare membro a membro, trovando

$$\frac{dy}{(y+1)(y-2)} = 2xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{(y+1)(y-2)} = \int 2xdx .$$

Fattorizzando la funzione integranda a 1 membro si ha $\frac{1}{(y+1)(y-2)} = \frac{-1/3}{y+1} + \frac{1/3}{y-2}$, quindi

$$-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-2}\right)dy = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\log\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad \log\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = 3x^2 + c .$$

Nell'ultimo passaggio, osserviamo che non c'è bisogno di scrivere $3c$, dato che un multiplo di una costante reale arbitraria è ancora un generico numero reale.

Passando all'esponenziale, scriviamo $\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = e^{3x^2+c}$, o anche $\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = e^c \cdot e^{3x^2}$. Possiamo porre $e^c = c_1$ (costante positiva), ma cambiando ancora nome alla costante possiamo anche scrivere $\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = ce^{3x^2}$ con $c > 0$. In altre parole, ad ogni passaggio possiamo, all'occorrenza, cambiare la costante e continuare a chiamarla c, eventualmente precisando l'intervallo in cui essa può essere fissata. Ora, siccome l'equazione $|x| = b$ (con b positivo fissato) ha le due soluzioni $x = b$ e $x = -b$, possiamo scrivere $\frac{y-2}{y+1} = \pm ce^{3x^2}$ con $c > 0$, che è come dire $\frac{y-2}{y+1} = ce^{3x^2}$ con c costante non nulla.

Questa espressione fornisce l'integrale generale in forma implicita. In questo caso siamo in grado di esplicitare l'integrale generale. Infatti

$$y - 2 = yce^{3x^2} + ce^{3x^2} \quad \Rightarrow \quad y\left(1 - ce^{3x^2}\right) = 2 + ce^{3x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2 + ce^{3x^2}}{1 - ce^{3x^2}}, \quad \forall c \in R - \{0\}.$$

Occorre fare a questo punto alcune osservazioni. In primo luogo, abbiamo già osservato che le funzioni costanti $y = 2$ e $y = -1$ sono soluzioni particolari dell'ED ottenute non attraverso il procedimento e che quindi si devono aggiungere all'integrale generale $y = \frac{2 + ce^{3x^2}}{1 - ce^{3x^2}}$ (con $c \in R - \{0\}$). Si nota che la soluzione $y = 2$ si può ottenere dall'integrale generale facendo tendere la costante c (come se fosse una variabile) a 0, così come la soluzione $y = -1$ si può ottenere dall'integrale generale facendo tendere la costante c a $\pm\infty$. Cioè

$$\lim_{c \to 0} \frac{2 + ce^{3x^2}}{1 - ce^{3x^2}} = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{c \to \infty} \frac{2 + ce^{3x^2}}{1 - ce^{3x^2}} = -1 .$$

In questo senso, le soluzioni particolari $y = 2$ e $y = -1$ si dicono non singolari (si dice singolare quella soluzione particolare che non si può ottenere dall'integrale generale facendo tendere la costante c in modo opportuno).

Se accanto all'ED ci fosse stata una condizione iniziale, per esempio $y(2) = 1$, la soluzione del corrispondente problema di Cauchy va ricercata tra l'integrale generale, poiché le soluzioni particolari costanti $y = 2$ e $y = -1$ non soddisfano la condizione iniziale. Conviene, in tal caso, utilizzare la forma implicita $\frac{y-2}{y+1} = ce^{3x^2}$ dell'integrale generale (che è più semplice, in quanto in essa c appare una sola volta). Imponiamo a questa forma la condizione iniziale, abbiamo $\frac{1-2}{1+1} = ce^{12}$, da cui $c = -\frac{1}{2e^{12}}$. Sostituendo c nell'integrale generale (forma esplicita), troviamo infine la soluzione $y = \frac{2 - \frac{e^{3x^2}}{2e^{12}}}{1 + \frac{e^{3x^2}}{2e^{12}}} = \frac{4 - e^{3x^2-12}}{2 + e^{3x^2-12}}$ del problema.

Un'altra importante osservazione riguarda il campo di esistenza della soluzione. In questo caso abbiamo trovato una funzione definita su tutto **R** (dato che il denominatore $2 + e^{3x^2-12}$ non si annulla mai in **R**), ma è chiaro che per c positivo si trova una funzione che non è definita in tutto **R**. Si consideri infatti lo stesso problema di Cauchy, ma con la condizione iniziale $y(0) = 5$. Si ha allora $\frac{5-2}{5+1} = ce^0$, da cui $c = \frac{1}{2}$; si ha così la funzione $y = \frac{4+e^{3x^2}}{2-e^{3x^2}}$, che è definita per $x \neq \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$. Essendo il punto iniziale $x_0 = 0 \in \left(-\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}, \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}\right)$, l'unica soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{4+e^{3x^2}}{2-e^{3x^2}}$ definita nell'intervallo $\left(-\sqrt{\frac{\log 2}{3}}, \sqrt{\frac{\log 2}{3}}\right)$.

Consideriamo ancora l'ED, senza problema di Cauchy, il cui integrale generale è $y = \frac{2+ce^{3x^2}}{1-ce^{3x^2}}$, con $c \neq 0$, a cui bisogna aggiungere le soluzioni particolari costanti $y = 2$ e $y = -1$. Prendiamo la funzione corrispondente al valore $c = \frac{1}{3}$, cioè $y = \frac{6+e^{3x^2}}{3-e^{3x^2}}$; osserviamo che questa funzione è definita nell'insieme $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{\log 3}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{\log 3}{3}}, \sqrt{\frac{\log 3}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{\log 3}{3}}, \infty\right)$.

ESEMPIO 3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \sqrt[5]{y^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$

SOLUZIONE. La separazione delle variabili dà $\frac{dy}{\sqrt[5]{y^2}} = dx$, da cui $\frac{5}{3} y^{\frac{3}{5}} = x + c$, cioè $y = \left(\frac{3x+c}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$. Ma, essendo $Q(y) = 0$ per $y = 0$, si ha anche la soluzione $y = 0$. Ora, ponendo nell'integrale generale la condizione $y(1) = 0$, troviamo $c = -3$, da cui la soluzione $y = \left(\frac{3x-3}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$. Ma anche la funzione $y = 0$ soddisfa la condizione iniziale, perciò in questo caso il problema di Cauchy ammette *due* soluzioni distinte.

Equazione di Bernoulli

Si tratta di un caso particolare di ED del primo ordine non lineare, facilmente risolubile in quanto si riconduce, con una opportuna sostituzione, ad una ED lineare.

L'equazione di Bernoulli ha la forma

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \tag{7.1}$$

che è simile alla ad una ED lineare, a parte il fattore y^{α}. Anche in questo caso $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue in uno stesso intervallo J. Supponiamo che α sia un *qualsiasi* numero reale, ma per evitare di ricadere in casi già noti escludiamo i due valori particolari $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$.

Per risolvere la (7.1) si dividono entrambi i membri per y^{α}, osservando preliminarmente che se $\alpha > 0$ la funzione costante $y = 0$ è una particolare soluzione della (7.1).

La (7.1) diventa

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x). \tag*{(7.1)'}$$

Si considera la sostituzione di variabile $v = y^{1-\alpha}$ (si tenga sempre conto che v e y sono funzioni di x, cioè $v(x) = y^{1-\alpha}(x)$) da cui si ricava $y = v^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Si ha, per la regola di derivazione di una funzione composta, $v' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y'$. Sostituendo nella (7.1)' si ottiene

$$\frac{1}{1-\alpha} v' + a(x)v = b(x) \quad \Rightarrow \quad v' + (1-\alpha)\,a(x)v = (1-\alpha)\,b(x)$$

che è una ED lineare del 1 ordine non omogenea il cui integrale generale è dato dalla formula

$$v = e^{-p(x)}\left((1-\alpha)\int b(x)e^{p(x)}dx + c\right) \quad \forall c \in \mathrm{R}$$

dove $p(x) = (1-\alpha)\int a(x)dx$. L'integrale generale dell'ED (7.1) è allora

$$y = \left\{e^{-p(x)}\left((1-\alpha)\int b(x)e^{p(x)}dx + c\right)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \forall c \in \mathrm{R}\,.$$

Fissato c in R si potrà stabilire anche il dominio di y.

ESEMPIO 7.1. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + \dfrac{3}{2x} y = \dfrac{3\arctan x}{2x}\sqrt[3]{y} \\ y(1) = \dfrac{\pi\sqrt{\pi}}{8} \end{cases}$.

SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione di Bernoulli, con $\alpha = \frac{1}{3}$, in cui si assume $x > 0$ per via della condizione iniziale. La funzione costante $y = 0$ non è soluzione del problema. Dividendo entrambe i membri per $y^{\frac{1}{3}}$ (che equivale a moltiplicare gli stessi per $y^{-\frac{1}{3}}$), l'ED diventa

$$y^{-\frac{1}{3}}y' + \frac{3}{2x}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3\arctan x}{2x}\,.$$

Si pone $v = y^{\frac{2}{3}}$, da cui si ricava $y = v^{\frac{3}{2}}$. Derivando i membri della prima relazione rispetto a x, si ottiene $v' = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'$. Sostituendo nell'ultima ED si ha

$$\frac{3}{2}v'+\frac{3}{2x}v=\frac{3\arctan x}{2x} \quad \Rightarrow \quad v'+\frac{1}{x}v=\frac{\arctan x}{x}.$$

Quest'ultima è una ED lineare del 1 ordine non omogenea, quindi, posto

$p(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$, $e^{p(x)}=x$ e $e^{-p(x)}=\frac{1}{x}$ il suo integrale generale è dato dalla formula

$$v=\frac{1}{x}\left\{\int\arctan x\,dx+c\right\},\ \forall c\in\mathrm{R}.$$

Si ha $\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, da cui si ricava

$$v=\frac{1}{x}\left\{x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c\right\}=\arctan x-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x}+\frac{c}{x},\ \forall c\in\mathrm{R}$$

e quindi l'integrale generale

$$y=\left\{\arctan x-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x}+\frac{c}{x}\right\}^{\frac{3}{2}},\ \forall c\in\mathrm{R}.$$

Se dovessimo risolvere solo l'ED (e non il problema di Cauchy) allora all'integrale generale bisogna aggiungere la soluzione particolare $y=0$ che, non potendosi ottenere dall'integrale generale per nessun valore di c (neanche al limite) rappresenta una soluzione singolare dell'ED.

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}}{8}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}+c\right)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}+c=\left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2^3}\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow c=\frac{\ln 2}{2},$$

e quindi la soluzione del problema è $y=\left\{\arctan x-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x}+\frac{\ln\sqrt{2}}{x}\right\}^{\frac{3}{2}}$ definita in $\left(0,+\infty\right)$.

ESEMPIO 7.2. Risolvere l'equazione differenziale $y'+3y=\frac{x}{y^2}$.

SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione di Bernoulli, in cui l'intervallo J coincide con **R** e l'esponente α vale -2. Posto $u = y^{1-(-2)} = y^3$, si ha $y=\sqrt[3]{u}$, da cui (ricordando che la derivata si calcola rispetto alla variabile x), $y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$. Perciò l'equazione data diventa:

$$\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}+3\sqrt[3]{u}=\frac{x}{\sqrt[3]{u^2}},$$

cioè $\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\left(u'+9u-3x\right)=0$. In questo caso il fattore da eliminare per ricondurre l'equazione a lineare è $\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$, che non può annullarsi, ma se si avesse invece un fattore u^β con β positivo, dovremmo considerare a parte anche la soluzione $u = 0$.

Infine, l'equazione $u' + 9u = 3x$ si risolve come sopra: moltiplicando per e^{9x} si ha $u'e^{9x} +$ $+ 9ue^{9x} = 3xe^{9x}$, cioè $\frac{d}{dx}\left(ue^{9x}\right) = 3xe^{9x}$. Si ha quindi $ue^{9x} = \frac{9x-1}{27}e^{9x} + c$, cioè (cambiando la costante) $u = \frac{ce^{-9x} + 9x - 1}{27}$. Infine, si ottiene l'integrale generale $y = \frac{\sqrt[3]{ce^{-9x} + 9x - 1}}{3}$.

ESEMPIO 7.2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' + y = x\sqrt{y} \\ y(3) = 0. \end{cases}$

SOLUZIONE. Di nuovo *J* coincide con **R**; tuttavia si noti che una qualsiasi soluzione dell'ED deve avere codominio contenuto in $[0\ ,\ +\infty)$, altrimenti il secondo membro non avrebbe senso (ciò significa tra l'altro che non si può dare una condizione iniziale $y(a) = b$ con $b < 0$).

Essendo $\alpha = \frac{1}{2}$, poniamo $u = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$, da cui $y = u^2$ e quindi $y' = 2uu'$. Pertanto l'equazione diventa $2uu' + u^2 - xu = 0$, cioè $u(2u' + u - x) = 0$. Qui, a differenza di quanto accadeva nel caso precedente, si raccoglie un fattore u, per cui eliminandolo si deve tener conto della soluzione $u = 0$, da cui $y = 0$. La rimanente ED lineare dà $u = ce^{-\frac{x}{2}} + x - 2$, da cui $y = \left(ce^{-\frac{x}{2}} + x - 2\right)^2$. Perciò l'integrale generale dell'equazione proposta è $y = \left(ce^{-\frac{x}{2}} + x - 2\right)^2$, ma a parte va considerato l'integrale singolare $y = 0$.

Ponendo infine la condizione iniziale, troviamo $0 = \left(ce^{-\frac{3}{2}} + 3 - 2\right)^2$, da cui $c = -e^{\frac{3}{2}}$, e da ciò otteniamo la soluzione $y = \left(x - 2 - e^{\frac{3-x}{2}}\right)^2$. Ma osserviamo che anche $y = 0$ soddisfa la condizione iniziale, per cui in questo caso il problema di Cauchy ammette due soluzioni distinte.

Esempio 7.3) Integrare l'ED $\quad y'(2y+1)\left(x^2+2x+2\right) - y = 0$

È un ED differenziale a variabili separabili. $y = 0$ è una soluzione particolare. Il polinomio $x^2 + 2x + 2 > 0 \ \ \forall x \in \mathrm{R}$. Separando le variabili si ha

$$\frac{2y+1}{y}dy = \frac{dx}{x^2+2x+2},$$

e integrando membro a membro si ottiene

$$\int \frac{2y+1}{y}dy = \int \frac{dx}{x^2+2x+2} \quad \Rightarrow \quad \int \left(2 + \frac{1}{y}\right)dy = \int \frac{1}{1+\left(x^2+1\right)}dx \quad \Rightarrow \quad 2y + \ln|y| = \arctan\left(x^2+1\right) + c$$

$\forall c \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. L'integrale generale è dato solo in forma implicita (è impossibile esplicitare rispetto a y). La soluzione particolare $y = 0$ è singolare in quanto non si ottiene da quella generale per nessun valore (anche limite di c).

Esempio 7.4) Integrare l'ED $y' - 2xy = xy^2$

È un ED differenziale di Bernoulli con $\alpha = 2$. $y = 0$ è una soluzione particolare. Divido i membri per y^2

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = x,$$

e pongo $v = y^{-1}$, da cui, invertendo, $y = v^{-1}$. Derivando entrambi i membri della $v = y^{-1}$ rispetto a x si ha $v' = -y^{-2}y'$. Quindi sostituendo all'ultima ED si ottiene

$$-v' - 2xv = x$$

cioè

$$v' + 2xv = -x,$$

che una ED lineare del 1 ordine non omogenea. Quindi, posto

$p(x) = \int 2x dx = x^2$, $e^{-p(x)} = e^{-x^2}$, $e^{p(x)} = e^{x^2}$ si ha

$$v = e^{-x^2}\left\{\int -xe^{x^2}dx + c\right\} \Rightarrow v = e^{-x^2}\left\{-\frac{e^{x^2}}{2} + c\right\} \Rightarrow v = \frac{-1 + ce^{-x^2}}{2} \quad \forall c \in \mathrm{R}.$$

L'integrale generale è, allora, $y = \dfrac{2}{-1 + ce^{-x^2}}$ $\forall c \in \mathrm{R}$. La soluzione particolare $y = 0$ si ottiene da quella generale per $c \to \infty$ e quindi non è singolare.

Il dominio dell'integrale generale dipende dalla scelta della costante c. Per esempio se $c < 1$ i corrispondenti integrali sono definiti su tutto R, se invece se $c > 1$ i corrispondenti integrali non sono definiti su tutto R. Se invece se $c = 1$ il corrispondente integrale è definito su tutto R tranne che in 0.

ED lineari di ordine qualsiasi

La più generica equazione differenziale lineare di ordine n in forma normale si scrive come

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{8.1}$$

dove le funzioni $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ sono continue in uno stesso intervallo $J \subseteq \mathbf{R}$. Si osservi che tali funzioni possono essere di tipo qualsiasi, ad esempio possono essere funzioni trascendenti. L'aggettivo "lineare" si riferisce al fatto che il primo membro della (8.1) è lineare *rispetto alle* y, y', y'',..., $y^{(n)}$, cioè che esso è una combinazione lineare delle $y^{(k)}$ (k = 0, 1, ..., n) con coefficienti in generale dipendenti da x. Se il termine noto $f(x)$ è la funzione identicamente nulla in J, l'equazione si dice *omogenea*; invece nel caso generale, rappresentato dalla (8.1), l'equazione si dice *non omogenea*.

La linearità della forma assunta dall'espressione a primo membro della (8.1) può essere scritta in forma compatta (sintetica) nel seguente modo

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$$

dove con L si intende una applicazione (detta operatore differenziale lineare di ordine n) che associa ad ogni funzione y, derivabile n volte con continuità in un opportuno intervallo J (cioè di classe $C^n(J)$), la funzione combinazione lineare $L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$ dove i coefficienti $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, sono prefissate funzioni continue in J. Chiaramente la funzione $L(y)$ risulta continua in J (cioè di classe $C^0(J)$). Formalmente abbiamo

$$L : C^n(J) \to C^0(J)$$
$$y \;\mapsto\; L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y.$$

Per esempio, se $n = 2$, $a_1(x) = 2x$ e $a_2(x) = 3$, allora

$$L : C^2(J) \to C^0(J)$$
$$y \;\mapsto\; L(y) = y'' + 2xy' + 3y.$$

Affrontiamo, dapprima, il problema della determinazione dell'integrale generale dell'ED lineare omogenea di ordine n in forma normale, che possiamo scrivere sinteticamente come $L(y) = 0$. A tale scopo si dimostra il seguente teorema detto teorema dimensionale

TEOREMA 1 (Teorema dimensionale). *Data un'ED lineare omogenea di ordine n in forma normale* $L(y) = 0$, cioè

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{8.2}$$

*dove i coefficienti $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ sono continui in un intervallo $J \subseteq$ **R**, il suo integrale generale* (*cioè l'insieme* $\ker(L)$ *delle funzioni di classe* $C^n(J)$ *che sono soluzione della* (8.2)) *è uno spazio vettoriale di dimensione n.*

Ovviamente si ha $\ker(L) \subset C^n(J)$.

Il teorema stabilisce che per determinare l'integrale generale della (8.2) (cioè l'insieme $\ker(L)$) basta individuare, nell'insieme $\ker(L)$, n funzioni (soluzioni particolari della (8.2)) $u_1,\ldots,u_n$ linearmente indipendenti, tali cioè da costituire una base dello spazio $\ker(L)$. Tale base viene detta sistema fondamentale dell'ED lineare (8.2) e ci consentirà di scrivere l'integrale generale della (8.2) come combinazione lineare delle sue funzioni, cioè

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x), \quad \forall c_1,\ldots,c_n \in \mathrm{R} \text{ e } \forall x \in \mathrm{J}.$$

Purtroppo questo teorema caratterizza l'integrale generale solo dal punto di vista strutturale, ma non fornisce alcuna informazione utile per *individuare* una base dello spazio in questione. In generale, quando l'ordine dell'ED è maggiore di 1, il problema della determinazione del sistema fondamentale della (8.2) è impossibile da risolvere. Vedremo in seguito che il problema è risolubile in alcuni casi particolari, ad esempio quando i coefficienti sono costanti.

Consideriamo ora l'ED lineare non omogenea di ordine n in forma normale (8.1), che possiamo scrivere sinteticamente come $L(y) = f(x)$. Per determinare il suo integrale generale utilizziamo il seguente teorema che mette in relazione l'integrale generale di una generica ED lineare nella forma (8.1) con quello della corrispondente equazione omogenea (8.2).

TEOREMA 2 (integrale generale di un'ED lineare non omogenea in forma normale). *Data l'ED* (8.1)*, si consideri dapprima la corrispondente ED omogenea* (8.2)*, e si supponga di conoscere una base* $u_1,\ldots,u_n$ *dello spazio delle soluzioni. Sia inoltre* $\bar{y}(x)$ *una soluzione particolare dell'equazione completa* (8.1)*. Allora l'integrale generale di tale equazione è dato dalla formula*

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x) + \bar{y}(x).$$

In altre parole, l'integrale dell'equazione non omogenea si ottiene sommando all'integrale generale dell'omogenea una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Si pone quindi il problema di determinare una tale soluzione particolare $\bar{y}$, una volta che siano note le funzioni $u_1,\dots,u_n$, problema che sarà risolto nelle lezioni successive. Ciò significa che l'effettiva difficoltà nella risoluzione della (8.1) consiste nel risolvere l'equazione omogenea associata; se si riesce a risolvere questo problema, è sempre possibile (eventualmente tramite l'introduzione di opportune funzioni integrali) risolvere la (8.1).

Vediamo cosa dice la teoria delle ED lineari per quanto riguarda il problema di Cauchy. Fissato un punto x_0 in J, si consideri il sistema

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = k_0 \\ y'(x_0) = k_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}, \end{cases} \tag{8.3}$$

dove k_0, k_1, ..., k_{n-1} sono n numeri reali fissati. Ebbene, un importante teorema afferma che il problema (8.3) ammette sempre una soluzione, e che tale soluzione è unica; inoltre essa è definita *in grande*, cioè in tutto l'intervallo J.[1]

ED lineari omogenee di ordine *n* a coefficienti costanti

Come già accennato sopra, questo è uno dei pochi casi in cui è possibile (a parte difficoltà algebriche) determinare esplicitamente n soluzioni indipendenti dell'ED lineare omogenea, e perciò scriverne l'integrale generale.

Sia data un'ED lineare omogenea a coefficienti costanti, cioè un'equazione del tipo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{9.1}$$

dove a_1, a_2, ..., a_n sono n costanti assegnate (perciò è ancora un'equazione del tipo (8.2), dove però i coefficienti sono funzioni costanti su tutto **R**). Per determinare una base dello spazio delle sue soluzioni, cominciamo col vedere se essa ammette qualche soluzione del tipo $y = e^{\alpha x}$. Essendo $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$, ed in generale $y^{(k)} = \alpha^k e^{\alpha x}$, sostituendo nella (9.1) si trova

$$\left(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n\right)e^{\alpha x} = 0,$$

che, essendo $e^{\alpha x} \neq 0$, equivale all'equazione algebrica

$$\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0, \tag{9.2}$$

che si può scrivere $P(\alpha) = 0$, se si indica con $P(\alpha)$ il polinomio $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$, ottenuto sostituendo nel primo membro della (9.1) le derivate di y con le rispettive potenze di α. Esso viene chiamato **polinomio caratteristico** dell'equazione (9.1), mentre la (9.2) viene detta **equazione caratteristica** dell'equazione differenziale (9.1).

Dunque la funzione $e^{\alpha x}$ è soluzione della (9.1) se il numero α è una delle radici dell'equazione caratteristica (9.2); osserviamo inoltre che se $\alpha \neq \beta$ le due funzioni $e^{\alpha x}$ ed $e^{\beta x}$ sono linearmente indipendenti, e più in generale se i numeri α_1, α_2, ..., α_n sono tutti distinti allora le funzioni $e^{\alpha_1 x}$, $e^{\alpha_2 x}$, ..., $e^{\alpha_n x}$ sono linearmente indipendenti. Questo ci consente di scrivere l'integrale generale

[1] Se l'equazione non è lineare, in generale il teorema così enunciato non è valido. Tuttavia, si può dimostrare che, sotto opportune ipotesi, esiste ancora una soluzione unica al problema di Cauchy, ma che in generale è una soluzione *in piccolo*, cioè è definita in un opportuno intorno di x_0 contenuto in I.

della (9.1) nel caso particolare in cui le radici dell'equazione (9.2) sono tutte reali e distinte: in tal caso le n funzioni $u_1(x) = e^{\alpha_1 x}$, $u_2(x) = e^{\alpha_2 x}$, ..., $u_n(x) = e^{\alpha_n x}$ sono n soluzioni indipendenti dell'equazione (9.1), per cui l'integrale generale della (9.1) è:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + c_n e^{\alpha_n x}\ ,\ \forall c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{R}\ \text{ e } \forall x \in \mathrm{R}\ .$$

Ovviamente, non sempre l'equazione caratteristica avrà n radici reali e distinte. In generale, dobbiamo aspettarci che essa presenti r radici reali distinte, di cui la prima α_1 appare con molteplicità λ_1, la seconda α_2 appare con molteplicità λ_2, ..., l'ultima α_r con molteplicità λ_r, e che inoltre vi siano s coppie distinte di radici complesse coniugate, diciamo $\beta_1 \pm i\gamma_1$ con molteplicità μ_1, $\beta_2 \pm i\gamma_2$ con molteplicità μ_2, ..., infine $\beta_s \pm i\gamma_s$ con molteplicità μ_s. In altre parole, l'equazione caratteristica si può scrivere nella forma

$$(\alpha - \alpha_1)^{\lambda_1}(\alpha - \alpha_2)^{\lambda_2} \cdots (\alpha - \alpha_r)^{\lambda_r}\ \cdot$$

$$\cdot\left(\alpha^2 - 2\beta_1\alpha + (\beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2)\right)^{\mu_1}\left(\alpha^2 - 2\beta_2\alpha + (\beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2)\right)^{\mu_2} \cdots \left(\alpha^2 - 2\beta_s\alpha + (\beta_s{}^2 + \gamma_s{}^2)\right)^{\mu_s} = 0\ .$$

In questo caso è ancora possibile determinare n soluzioni indipendenti della (9.1), con le regole riportate di seguito.

Vediamo dapprima il caso dell'equazione del secondo ordine, cioè

$$Ay'' + By' + Cy = 0. \tag{9.3}$$

La tecnica funziona anche senza normalizzare l'ED, perché l'eq (9.3) e la sua normalizzata hanno le stesse radici. In questo caso l'equazione caratteristica assume la forma

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0, \tag{9.4}$$

e quindi si hanno i seguenti casi:

1) $B^2 - 4AC > 0$, perciò si hanno due radici α_1 e α_2 reali e distinte. Le funzioni esponenziali $e^{\alpha_1 x}$ e $e^{\alpha_2 x}$ sono due soluzioni indipendenti della (9.3), per cui l'integrale generale è

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}\ ,\ \ \forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}\ \text{ e } \forall x \in \mathrm{R}\ .$$

2) $B^2 - 4AC = 0$, perciò la (9.4) ammette una sola radice reale α, di molteplicità 2. Una soluzione è senz'altro $e^{\alpha x}$, mentre un'altra soluzione indipendente da questa è $xe^{\alpha x}$. Perciò l'integrale generale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x} = (c_1 + c_2 x)e^{\alpha x}\ ,\ \ \forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}\ \text{ e } \forall x \in \mathrm{R}\ .$$

3) $B^2 - 4AC < 0$, perciò la (9.4) ammette le due radici complesse $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$. Essendo questi numeri complessi distinti, si potrebbe ancora utilizzare uno schema simile a quello del primo caso e scrivere le due soluzioni della base come $e^{(\beta+\gamma i)x}$ e $e^{(\beta-\gamma i)x}$, cioè rispettivamente $e^{\beta x}e^{\gamma i x}$ ed $e^{\beta x}e^{-\gamma i x}$. Tuttavia è possibile evitare di scrivere esponenziali complessi, in quanto esistono due funzioni reali linearmente indipendenti che soddisfano la (9.3) , cioè $e^{\beta x}\cos\gamma x$ ed $e^{\beta x}\mathrm{sen}\gamma x$ [(2)]. In conclusione, l'integrale generale è

$$y = c_1 e^{\beta x}\cos\gamma x + c_2 e^{\beta x}\mathrm{sen}\gamma x = e^{\beta x}(c_1\cos\gamma x + c_2\mathrm{sen}\gamma x)\ ,\ \ \forall c_1, c_2 \in \mathrm{C}\ \text{ e } \forall x \in \mathrm{R}\ .$$

Nel caso particolare che le radici siano immaginarie pure, cioè $\beta = 0$, l'espressione precedente si riduce a $y = c_1\cos\gamma x + c_2\mathrm{sen}\gamma x$.

---

[2] Il legame tra esponenziali complessi e funzioni goniometriche è dovuto al fatto che l'esponenziale nel campo complesso si può definire, con la formula di Eulero, proprio utilizzando le funzioni seno e coseno (e conserva le stesse proprietà formali dell'esponenziale nel campo reale). Si pone infatti $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)$.

ESEMPIO 9.1. Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 5y' + 6y = 0$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$, le cui radici sono $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 3$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 9.2. Risolvere l'equazione differenziale $y'' + y' - 2y = 0$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$, le cui radici sono $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = 1$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$.

ESEMPIO 9.3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 - 1 = 0$, da cui $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$. Si ha $y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$, quindi imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 - c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 4e^{x} - e^{-x}.$$

Ricordando che $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$, l'integrale generale si può scrivere anche nella forma $y = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x$. Si ha $y' = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x$, quindi imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 3\cosh x + 5\sinh x.$$

ESEMPIO 9.4. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} 4y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -5. \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$, da cui $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 x e^{\frac{x}{2}}$. Siccome poi è $y' = \left(\dfrac{c_1}{2} + c_2\right) e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{c_2}{2} x e^{\frac{x}{2}}$, imponendo le condizioni iniziali troviamo il sistema $\begin{cases} 1 = c_1 \\ -5 = \dfrac{c_1}{2} + c_2, \end{cases}$ da cui $c_1 = 1$ e $c_2 = -\dfrac{11}{2}$. In conclusione, la soluzione è $y = e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{11}{2} x e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{2 - 11x}{2} e^{\frac{x}{2}}$.

ESEMPIO 9.5. Risolvere l'ED $y'' - 4y' + 13y = 0$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0$, per cui abbiamo le due radici complesse $\alpha_1 = 2 - 3i$ e $\alpha_2 = 2 + 3i$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{(2-3i)x} + c_2 e^{(2+3i)x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$. Essa può essere scritta anche così $y = e^{2x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right)$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO 9.6. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 4y' + 7y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 + 4\alpha + 7 = 0$, per cui abbiamo le due radici complesse $\alpha_1 = -2 - i\sqrt{3}$ e $\alpha_2 = -2 + i\sqrt{3}$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{-2x}\cos(x\sqrt{3}) + $ $+ c_2 e^{-2x}\text{sen}(x\sqrt{3})$. Siccome poi è $y' = \left(c_2\sqrt{3} - 2c_1\right)e^{-2x}\cos(x\sqrt{3}) - \left(c_1\sqrt{3} + 2c_2\right)e^{-2x}\cos(x\sqrt{3})$, imponendo le condizioni iniziali troviamo il sistema $\begin{cases} 0 = c_1 \\ 2 = c_2\sqrt{3} - 2c_1, \end{cases}$ da cui $c_1 = 0$ e $c_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. In conclusione, la soluzione è $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-2x}\text{sen}(x\sqrt{3})$.

Ora consideriamo il caso dell'ED lineare a coefficienti costanti (9.1) di ordine qualsiasi, la cui equazione caratteristica è la (9.2). Supponiamo di conoscere tutte le radici reali e complesse di tale equazione caratteristica con le loro molteplicità, come detto sopra. Possiamo allora dare le seguenti regole per individuare n soluzioni indipendenti della (9.1) da cui poi scriviamo esplicitamente l'integrale generale:

- per ogni radice reale α semplice si consideri la funzione $e^{\alpha x}$;
- per ogni radice reale α di molteplicità $r \geq 2$ si considerino le r funzioni $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, $x^2 e^{\alpha x}$, ..., $x^{r-1}e^{\alpha x}$.
- per ogni coppia di radici complesse coniugate $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$ di molteplicità 1, si considerino le due funzioni $e^{\beta x}\cos\gamma x$ ed $e^{\beta x}\text{sen}\gamma x$; nel caso particolare $\beta = 0$ tali funzioni si riducono a $\cos\gamma x$ e $\text{sen}\gamma x$;
- per ogni coppia di radici complesse coniugate $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$ di molteplicità $r \geq 2$ si considerino le $2r$ funzioni
$$\begin{gathered} e^{\beta x}\cos\gamma x, \quad xe^{\beta x}\cos\gamma x, \ldots \quad, x^{r-1}e^{\beta x}\cos\gamma x, \\ e^{\beta x}\text{sen}\gamma x, \quad xe^{\beta x}\text{sen}\gamma x, \ldots \quad, x^{r-1}e^{\beta x}\text{sen}\gamma x, \end{gathered}$$
funzioni che nel caso particolare $\beta = 0$ si riducono a $\cos\gamma x, x\cos\gamma x, \ldots, x^{r-1}\cos\gamma x$ e $\text{sen}\gamma x, x\text{sen}\gamma x, \ldots, x^{r-1}\text{sen}\gamma x$.

ESEMPIO 9.7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''' - 7y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$

SOLUZIONE. La soluzione è definita in $J = R$. L'equazione caratteristica è $\alpha^3 - 7\alpha + 6 = 0$ le cui soluzioni sono $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = -3$. Quindi l'integrale generale è $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$. Calcoliamo $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - 3c_3 e^{-3x}$, $y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{-3x}$ e imponiamo le condizioni iniziali impostando il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_3 - 3c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{5}$, $c_3 = \frac{1}{5}$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy è $y = e^x - \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{1}{5}e^{-3x}$.

ESEMPIO 9.8. Risolvere l'equazione differenziale $y^{IV} - 2y''' - 12y'' - 14y' - 5y = 0$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica in questo caso è $\alpha^4 - 2\alpha^3 - 12\alpha^2 - 14\alpha - 5 = 0$, le cui radici sono $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$ e $\alpha_4 = 5$. Alla radice tripla -1 corrispondono le tre funzioni $u_1 = e^{-x}$, $u_2 = xe^{-x}$ e $u_3 = x^2e^{-x}$, mentre alla radice semplice 5 corrisponde la funzione $u_4 = e^{5x}$. Perciò l'integrale generale dell'equazione proposta è

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4e^{5x} = \left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)e^{-x} + c_4e^{5x}.$$

ESEMPIO 9.10. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 1 \\ y^{(4)}(0) = 2. \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^5 - \alpha^4 + 8\alpha^3 - 8\alpha^2 + 16\alpha - 16 = 0$, cioè $(\alpha - 1)(\alpha^2 + 4)^2 = 0$; si hanno quindi la radice reale 1 (semplice) e le radici complesse $\pm 2i$ (di molteplicità 2). Applicando le regole enunciate sopra, troviamo l'integrale generale

$$y = c_1e^x + c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen}2x + c_4x\cos 2x + c_5x\operatorname{sen}2x,$$

che si può anche scrivere come $y = c_1e^x + (c_2 + c_4x)\cos 2x + (c_3 + c_5x)\operatorname{sen}2x$.

Per imporre le condizioni iniziali, deriviamo quattro volte:

$$y' = c_1e^x + (2c_3 + c_4 + 2c_5x)\cos 2x + (c_5 - 2c_2 - 2c_4x)\operatorname{sen}2x;$$
$$y'' = c_1e^x + (4c_5 - 4c_2 - 4c_4x)\cos 2x - (4c_3 + 4c_4 + 4c_5x)\operatorname{sen}2x;$$
$$y''' = c_1e^x - (8c_3 + 12c_4 + 8c_5x)\cos 2x + (8c_2 - 12c_5 + 8c_4x)\operatorname{sen}2x;$$
$$y^{(4)} = c_1e^x + (16c_2 - 32c_5 + 16c_4x)\cos 2x + (16c_3 + 32c_4 + 16c_5x)\operatorname{sen}2x.$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} -2 = c_1 + c_2 \\ -1 = c_1 + 2c_3 + c_4 \\ 0 = c_1 + 4c_5 - 4c_2 \\ 1 = c_1 - 8c_3 - 12c_4 \\ 2 = c_1 + 16c_2 - 32c_5, \end{cases}$$

la cui soluzione è $c_1 = -\frac{6}{5}$, $c_2 = -\frac{4}{5}$, $c_3 = \frac{23}{80}$, $c_4 = -\frac{3}{8}$, $c_5 = -\frac{1}{2}$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy è $y = -\frac{6}{5}e^x - \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{8}x\right)\cos 2x + \left(\frac{23}{80} - \frac{1}{2}x\right)\operatorname{sen}2x$.

Ricordiamo che nel caso in cui l'equazione caratteristica $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ dell'ED omogenea

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{5.1}$$
ammette due radici complesse e coniugate $\beta \pm i\gamma$, una base dello spazio delle soluzioni dell'ED è data dalle funzioni esponenziali complesse $e^{(\beta+i\gamma)x}$ e $e^{(\beta-i\gamma)x}$, cioè rispettivamente $e^{\beta x}e^{\gamma ix}$ ed $e^{\beta x}e^{-\gamma ix}$.
Quindi l'integrale generale della (5.1) è

$$y = e^{\beta x}(c_1 e^{i\gamma x} + c_2 e^{-i\gamma x}),\ \ \forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}\ \text{ e }\ \forall x \in \mathrm{R}.$$

Tuttavia è possibile evitare di scrivere esponenziali complessi, effettuando un cambiamento di base mediante la formula di Eulero $e^{\pm iy} = \cos y \pm \sin y$; in dettaglio si ha

$$\begin{aligned} y &= e^{\beta x}(c_1 e^{i\gamma x} + c_2 e^{-i\gamma x}) = e^{\beta x}\left[c_1\left(\cos(\gamma x) + i\sin(\gamma x)\right) + c_2\left(\cos(\gamma x) - i\sin(\gamma x)\right)\right] = \\ &= e^{\beta x}\left[(c_1 + c_2)\cos(\gamma x) + i(c_1 - c_2)\sin(\gamma x)\right] = e^{\beta x}\left[k_1\cos(\gamma x) + k_2\sin(\gamma x)\right], \end{aligned}$$

$\forall k_1, k_2 \in \mathrm{C}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. In pratica il sistema fondamentale $u_1 = e^{\beta x}e^{i\gamma x}$ e $u_2 = e^{\beta x}e^{-i\gamma x}$ è stato sostituito dal nuovo sistema fondamentale $w_1 = e^{\beta x}\cos(\gamma x)$ e $w_1 = e^{\beta x}\sin(\gamma x)$.

ESEMPIO 5.1. Risolvere l'equazione differenziale $y''' - 64y = 0$.
SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^3 - 64 = 0$. Poiché

$$\alpha^3 - 64 = (\alpha - 4)(\alpha^2 + 4\alpha + 16),$$

le soluzioni, tutte semplici, sono $\alpha_1 = 4$ e $\alpha_{2,3} = -2 \pm 2i\sqrt{3}$. Quindi l'integrale generale è

$$y = c_1 e^{4x} + e^{-2x}\left(c_2\cos\left(2\sqrt{3}x\right) + c_3\sin\left(2\sqrt{3}x\right)\right),\ \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathrm{C}\quad \text{e}\quad \forall x \in \mathrm{R}.$$

ESEMPIO 5.2. Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 9y = 0$.
SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ ed ammette una radice doppia $\alpha = 3$. Perciò l'integrale generale è $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$.

ESEMPIO 5.3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} 2y''' + 5y'' - 4y' - 12y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1. \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 4\alpha - 12 = 0$. Per tentativi si verifica che $\alpha_1 = -2$ è una sua radice. Mediante la regola di Ruffini si scompone il polinomio nel modo seguente $2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 4\alpha - 12 = (\alpha + 2)(2\alpha^2 + \alpha - 6)$ e si ricavano le altre due radici $\alpha_2 = -3/2$ e $\alpha_3 = -2$. Quindi -2 è una radice doppia, mentre $-3/2$ una radice semplice. 3. L'integrale generale è $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + c_3 e^{\frac{3}{2}x}$, $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. Imponiamo ora sull'integrale generale le condizioni iniziali:
Quindi calcoliamo prima le derivate successive:

$$y' = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-2x} + \frac{3}{2}c_3 e^{\frac{3}{2}x},$$

$$y'' = (-2c_2 - 2c_2 + 4c_1 + 4c_2 x)e^{-2x} + \frac{9}{4}c_3 e^{\frac{3}{2}x}$$

e impostiamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ -2c_1 + c_2 + \dfrac{3}{2}c_3 = 1 \\ 4c_1 - 4c_2 + \dfrac{9}{4}c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{3}{7} \\ c_2 = 1 \\ c_3 = \dfrac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \quad y = \left(\frac{3}{7} + x\right)e^{-2x} + \frac{4}{7}e^{\frac{3}{2}x}, \ \forall x \in \mathrm{R}$$

ESEMPIO 5.4. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''' + 13y' - 34y = 0 \\ y(\pi/4) = 0 \\ y'(\pi/4) = 1 \\ y''(\pi/4) = 2 \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^3 + 13\alpha - 34 = 0$. Per tentativi si verifica che $\alpha_1 = 2$ è una sua radice. Mediante la regola di Ruffini si scompone il polinomio nel modo seguente $\alpha^3 - 13\alpha - 34 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 17)$ e si ricavano le altre due radici complesse e coniugate $\alpha_{2,3} = -1 \pm 4i$. L'integrale generale è $y = (c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x))e^{-x} + c_3 e^{2x}$, $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathrm{C}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. Imponiamo ora sull'integrale generale le condizioni iniziali:
Quindi calcoliamo prima le derivate successive:

$$y' = (-c_1 \cos(4x) - c_2 \sin(4x) - 4c_1 \sin(4x) + 4c_2 \cos(4x))e^{-x} + 2c_3 e^{2x},$$

$$y'' = (+c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x) + 4c_1 \sin(4x) - 4c_2 \cos(4x) +$$
$$-4c_1 \sin(4x) + 4c_2 \cos(4x) + 16c_1 \cos(4x) + 16c_2 \sin(4x))e^{-x} + 4c_3 e^{2x}$$

e impostiamo il sistema

$$\begin{cases} -c_1 e^{-\pi/4} + c_3 e^{\pi/2} = 0 \\ (c_1 - 4c_2)e^{-\pi/4} + 2c_3 e^{\pi/2} = 1 \\ -17c_1 e^{-\pi/4} + 4c_3 e^{\pi/2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{2}{13}e^{\pi/4} \\ c_2 = -\dfrac{19}{52}e^{\pi/4} \\ c_3 = -\dfrac{2}{13}e^{-\pi/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(-\frac{2}{13}\cos(4x) - \frac{19}{52}\sin(4x)\right)e^{\frac{\pi}{4} - x} - \frac{2}{13}e^{2x - \frac{\pi}{2}}, \ \forall x \in \mathrm{R}.$$

ESEMPIO 5.5. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = -1 \end{cases}$

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = 0$. Per tentativi si verifica che $\alpha_1 = 2$ è una sua radice. Mediante la regola di Ruffini si scompone il polinomio nel modo seguente $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = (\alpha - 2)(\alpha^2 - 4\alpha + 4) = (\alpha - 2)^3$; quindi l'eq. caratteristica ammette una radice tripla $\alpha_1 = 2$. L'integrale generale è $y = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{2x}$, $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. Imponiamo ora sull'integrale generale le condizioni iniziali:

Quindi calcoliamo prima le derivate successive:

$$y' = \left(2c_1 + 2c_2 x + 2c_3 x^2 + c_2 + 2c_3 x\right) e^{2x},$$

$$y'' = \left(4c_1 + 4c_2 x + 4c_3 x^2 + 2c_2 + 4c_3 x + 2c_2 + 4c_3 x + 2c_3\right) e^{2x}$$

e impostiamo il sistema

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 + c_3) e^2 = 2 \\ (2c_1 + 3c_2 + 4c_3) e^2 = 0 \\ (4c_1 + 8c_2 + 14c_3) e^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{19}{2} e^{-2} \\ c_2 = -\dfrac{22}{2} e^{-2} \\ c_3 = \dfrac{7}{2} e^{-2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{7x^2 - 22x + 19}{2} e^{2x-1}, \ \forall x \in \mathrm{R}.$$

ESEMPIO 5.6. Integrare l'ED $y^{(4)} + 4y''' + 14y'' + 20y' + 25y = 0$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^4 + 4\alpha^3 + 14\alpha^2 + 20\alpha + 25 = 0$. Per scomporre il polinomio a primo membro proviamo a vedere se esso risulta essere il quadrato di un trinomio, cioè se esiste un numero reale k tale che $\left(\alpha^2 + k\alpha + 5\right)^2 = \alpha^4 + 4\alpha^3 + 14\alpha^2 + 20\alpha + 25$. Sviluppando il quadrato e confrontando i membri si scopre che tale numero esiste ed è pari a $k = 2$. Il polinomio $\alpha^2 + 2\alpha + 5$ ammette come zeri i due numeri complessi e coniugati $\alpha_{1,2} = -1 \pm 2i$. Quindi l'eq. caratteristica ammette le due radici complesse e coniugate (entrambe di molteplicità 2) $\alpha_{1,2} = -1 \pm 2i$. L'integrale generale è

$$y = \left(c_1 \cos(2x) + c_2 x \cos(2x) + c_3 \sin(2x) + c_4 x \sin(2x)\right) e^{-x} =$$
$$= \left((c_1 + c_2 x)\cos(2x) + (c_3 + c_4 x)\sin(2x)\right) e^{-x}, \ \forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathrm{C} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathrm{R}.$$

ESEMPIO 5.7. Integrare l'ED $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è $\alpha^4 + 18\alpha^2 + 81 = 0$. Il polinomio a primo membro si può scrivere nel modo seguente $\alpha^4 + 18\alpha^2 + 81 = \left(\alpha^2 + 9\right)^2$; quindi l'eq. caratteristica ammette le due radici complesse e coniugate (entrambe doppie) $\alpha_{1,2} = \pm 3i$. L'integrale generale è $y = c_1 \cos(3x) + c_2 x \cos(3x) + c_3 \sin(3x) + c_4 x \sin(3x) = (c_1 + c_2 x)\cos(3x) + (c_3 + c_4 x)\sin(3x)$, $\forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathrm{C}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$.

ED lineari di ordine qualsiasi non omogenea

Ricordiamo il teorema che stabilisce il criterio per la determinazione dell'integrale generale di una ED lineare non omogenea di ordine *n* in forma normale

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x). \tag{5.2}$$

TEOREMA 2 (integrale generale di un'ED lineare non omogenea in forma normale). *Data l'ED* (5.2)*, si consideri dapprima la corrispondente ED omogenea*

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0, \tag{5.3}$$

e si supponga di conoscere una base $u_1,\dots,u_n$ *dello spazio delle soluzioni. Sia inoltre* $\bar{y}(x)$ *una soluzione particolare dell'equazione completa* (5.2). *Allora l'integrale generale di tale equazione è dato dalla formula*

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x) + \bar{y}(x).$$

In altre parole, l'integrale dell'equazione non omogenea si ottiene sommando all'integrale generale dell'omogenea una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Si pone quindi il problema di determinare una tale soluzione particolare $\bar{y}$, una volta che siano note le funzioni $u_1,\dots,u_n$. Ciò significa che l'effettiva difficoltà nella risoluzione della (5.2) consiste nel risolvere l'equazione omogenea associata; se si riesce a risolvere questo problema, è sempre possibile (eventualmente tramite l'introduzione di opportune funzioni integrali) risolvere la (5.2).

Criteri per determinare una soluzione particolare di una eq. diff. lineare a coeff. costanti non omogenea in base all'espressione del termine noto $b(x)$.

<u>1 CASO</u> $b(x) = ke^{\alpha x}$

In tal caso si ha:

- $\bar{y}(x) = Ae^{\alpha x}$ se il coefficiente α non è una radice dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;
- $\bar{y}(x) = Ax^m e^{\alpha x}$ se il coefficiente α è una radice di molteplicità m dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

Quindi, il problema della determinazione di $\bar{y}(x) = Ae^{\alpha x}$ consiste solo nel calcolare la costante A.

ESEMPIO 5.8. Integrare l'ED $y'' + y' - 2y = 5e^{3x}$.

SOLUZIONE. Determiniamo prima l'integrale generale dell'omogenea associata $y'' + y' - 2y = 0$. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ che ammette le due radici reali e distinte $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_1 = -2$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è $y_o = c_1e^x + c_2e^{-2x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. Determiniamo ora la soluzione particolare che, secondo il criterio, è del tipo $\bar{y}(x) = Ae^{3x}$. Per determinare la costante A si considerano le derivate successive di $\bar{y}(x)$ che, assieme alla $\bar{y}(x)$ stessa, si sostituiscono nell'ED non omogenea; dovendo la $\bar{y}(x)$ essere una soluzione particolare dell'ED non omogenea deve verificare l'identità. Si ha $\bar{y}'(x) = 3Ae^{3x}$ e $\bar{y}''(x) = 9Ae^{3x}$. Quindi, sostituendo, abbiamo

$$9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 5e^{3x} \quad\Rightarrow\quad 10A = 5 \quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale generale dell'ED è $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$.

<u>2 CASO</u> $b(x) = k_m x^m + k_{m-1}x^{m-1} + \cdots + k_1 x + k_0$.

In tal caso si ha:

- $\bar{y}(x) = A_{m+r}x^{m+r} + A_{m+r-1}x^{m+r-1} + \cdots + A_1x + A_0$ dove r è il minimo ordine di derivata della y nell'ED.

Quindi, il problema della determinazione di $\bar{y}(x)$ consiste solo nel calcolare i coefficienti $A_{m+r}, A_{m+r-1}, \ldots, A_1, A_0$ del polinomio.

ESEMPIO 5.9. Integrare l'ED $y'' + 6y' + 25y = 2x^3 - 5x + 8$.

SOLUZIONE. Determiniamo prima l'integrale generale dell'omogenea associata $y'' + 6y' + 25y = 0$. L'equazione caratteristica è $\alpha^2 + 6\alpha + 25 = 0$ che ammette le due radici complesse e coniugate e distinte $\alpha_{1,2} = -3 \pm 4i$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è $y_o = \left(c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)\right)e^{-3x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{C}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$. Determiniamo ora la soluzione particolare che, secondo il criterio, è del tipo $\bar{y}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (in questo caso r = 0). Per determinare le costanti *A,B,C e D* si considerano le derivate successive di $\bar{y}(x)$ che, assieme alla $\bar{y}(x)$ stessa, si sostituiscono nell'ED non omogenea; dovendo la $\bar{y}(x)$ essere una soluzione particolare dell'ED non omogenea deve verificare l'identità. Si ha $\bar{y}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ e $\bar{y}''(x) = 6Ax + 2B$. Quindi, sostituendo, abbiamo

$$6Ax + 2B + 18Ax^2 + 12Bx + 6C + 25Ax^3 + 25Bx^2 + 25Cx + 25D = 2x^3 - 5x + 8$$
$$\Rightarrow \quad 25Ax^3 + \left(18A + 25B\right)x^2 + \left(6A + 12B + 25C\right)x + 2B + 6C + 25D = 2x^3 - 5x + 8,$$

da cui, per il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 25A = 2 \\ 18A + 25B = 0 \\ 6A + 12B + 25C = -5 \\ 2B + 6C + 25D = 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{2}{25} \\ B = -\dfrac{36}{625} \\ C = -\dfrac{2993}{15625} \\ D = \dfrac{187958}{390625} \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'ED è, $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{R}$ e $\forall x \in \mathrm{R}$,

$$y = \left(c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)\right)e^{-3x} + \frac{2}{25}x^3 - \frac{36}{625}x^2 - \frac{1223}{15625}x + \frac{187958}{390625}.$$

Per gli altri casi fare riferimento allo schema finale; parte 8).

Esercizi: integrare le seguenti Eq. Diff.

- $y'' + 6y' + 25y = 2x^3 - 5x + 8$
- $y'' - 4y = 3x + 8e^{-x}$
- $y'' - 5y' + 6y = 4\cos(3x) + 2\sin(4x)$
- $y'' - y' - 42y = (2x + 3)e^{3x}$
- $y'' - 7y' + 12y = (2x^2 + 1)\cos(2x) - \sin(2x)$
- $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$
- $y'' - 6y' + 9y = (5x^2 + x + 3)e^{3x}$

Soluzione di un'ED lineare non omogenea: metodo della variazione delle costanti

A parte le difficoltà di calcolo, il procedimento per determinare una soluzione particolare di una ED lineare non omogenea in base all'espressione del termine noto, presenta due sostanziali limiti: in primo luogo, si può applicare solo alle ED lineari a coefficienti costanti; inoltre, esso funziona solo se il termine noto a secondo membro dell'ED assume una delle forme particolari viste nella tabella (o una combinazione lineare di esse).

In questo paragrafo diamo un metodo più generale per determinare una soluzione particolare di una ED lineare non omogenea in forma normale a coefficienti qualsiasi, nell'ipotesi che sia noto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

Premettiamo una definizione importante. Date n funzioni $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, derivabili $n-1$ volte in un intervallo J, si può definire su J la seguente funzione:

$$W(x)=\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

che viene chiamata ***matrice wronskiana*** relativa alle n funzioni date. Si osservi che la matrice wronskiana è una "funzione matriciale", nel senso che è una matrice quadrata di ordine n i cui elementi non sono numeri ma funzioni di x (si potrebbe anche dire che $W(x)$ associa a ciascun $x \in J$ una certa matrice $n \times n$).

Il determinante di $W(x)$ (in generale dipendente da x) sarà detto ***determinante wronskiano*** (o semplicemente "wronskiano") delle n funzioni date, e sarà indicato con il simbolo $w(x)$.

In particolare, per $n = 2$ la matrice wronskiana assume la semplice forma

$$W(x)=\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix},$$

e si ha in tal caso $w(x)=\det W(x)=u_1(x)u_2'(x)-u_1'(x)u_2(x)$.

Come abbiamo osservato, per definire $W(x)$, e quindi $w(x)$, basta considerare n funzioni derivabili $n-1$ volte in J, tuttavia potrebbe verificarsi che il determinante wronskiano $w(x)$ sia nullo in J (cioè che la matrice $W(x)$ sia singolare comunque si scelga x in J).

*S*e però le funzioni $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ sono n soluzioni indipendenti di un'ED lineare omogenea a coefficienti costanti, allora un teorema ci assicura che ***il determinante wronskiano w(x) non è mai nullo in J*** (cioè che la matrice $W(x)$ è non singolare comunque si scelga x in J). Ciò è molto importante, perché nel seguito si considereranno sistemi lineari in cui la matrice dei coefficienti è proprio $W(x)$.

Cominciamo ora ad illustrare il metodo della variazione delle costanti, considerando dapprima per semplicità il caso $n = 2$. Sia allora

$$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x) \tag{7.2}$$

una generica ED lineare non omogenea in forma normale, con a, b, f funzioni continue in J. Supponiamo di conoscere l'integrale generale dell'equazione omogenea $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, espresso nella forma $y_o = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$; per quanto osservato sopra, il wronskiano di $u_1(x)$ e $u_2(x)$ è sempre diverso da zero in J.

L'idea è la seguente: cerchiamo una soluzione $\bar{y}$ dell'equazione (7.2) nella forma

$$\bar{y}=v_1(x)u_1(x)+v_2(x)u_2(x), \tag{7.3}$$

dove i coefficienti $v_1(x)$ e $v_2(x)$ sono due funzioni, derivabili in J, da determinare. In altre parole, si sostituiscono le costanti dell'integrale generale dell'omogenea con due quantità variabili al variare di x (perciò si parla di "variazione delle costanti").
Poiché $\overline{y}$ deve essere una soluzione particolare della (7.2), deve, con le sue derivate successive, verificare l'identità. Quindi, calcolate

$$\overline{y}' = v_1'(x)u_1(x) + v_2'(x)u_2(x) + v_1(x)u_1'(x) + v_2(x)u_2'(x),$$

$$\overline{y}'' = v_1''(x)u_1(x) + v_2''(x)u_2(x) + 2v_1'(x)u_1'(x) + 2v_2'(x)u_2'(x) + v_1(x)u_1''(x) + v_2(x)u_2''(x),$$

si impone la condizione

$$\begin{aligned}\left[v_1''(x)u_1(x) + v_2''(x)u_2(x) + 2v_1'(x)u_1'(x) + 2v_2'(x)u_2'(x) + v_1(x)u_1''(x) + v_2(x)u_2''(x)\right] + \\ +a(x)\left[v_1'(x)u_1(x) + v_2'(x)u_2(x) + v_1(x)u_1'(x) + v_2(x)u_2'(x)\right] + \\ +b(x)\left[v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)\right] = f(x).\end{aligned} \tag{7.3}$$

Quest'ultima equivale a scrivere

$$\begin{aligned}\left[v_1''(x)u_1(x) + v_2''(x)u_2(x) + 2v_1'(x)u_1'(x) + 2v_2'(x)u_2'(x)\right] + \\ +a(x)\left[v_1'(x)u_1(x) + v_2'(x)u_2(x)\right] = f(x),\end{aligned} \tag{7.4}$$

perché, essendo $u_1(x), u_2(x)$ soluzioni dell'ED omogenea, nella (7.3) si ha

$$v_1(x)\left[u_1''(x) + a(x)u_1'(x) + b(x)u_1(x)\right] = 0,$$
$$v_2(x)\left[u_2''(x) + a(x)u_2'(x) + b(x)u_2(x)\right] = 0.$$

La (7.4) è verificata se

$$\begin{cases} u_1(x)v_1'(x) + u_2(x)v_2'(x) = 0 \\ v_1''(x)u_1(x) + v_2''(x)u_2(x) + 2v_1'(x)u_1'(x) + 2v_2'(x)u_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

In realtà la prima eq. del sistema implica

$$v_1''(x)u_1(x) + v_2''(x)u_2(x) + v_1'(x)u_1'(x) + v_2'(x)u_2'(x) = 0,$$

quindi il sistema, che verifica la condizione imposta sulla $\overline{y}$, è infine

$$\begin{cases} u_1(x)v_1'(x) + u_2(x)v_2'(x) = 0 \\ u_1'(x)v_1'(x) + u_2'(x)v_2'(x) = f(x) \end{cases}. \tag{7.5}$$

Visto che conosciamo u_1 e u_2, possiamo dire che (7.5) è un sistema lineare nelle incognite $v_1'(x)$ e $v_2'(x)$. In questo sistema la matrice dei coefficienti è proprio la matrice wronskiana delle due funzioni u_1 e u_2, il cui determinante $w(x)$ è sempre diverso da 0 in J.

Possiamo allora risolvere il sistema (7.5) applicando il metodo di Cramer: sostituendo alla prima colonna i termini noti troviamo il determinante $\begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ f(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$, che vale $-f(x)u_2(x)$, perciò abbiamo $v_1'(x) = -\dfrac{f(x)u_2(x)}{w(x)}$; analogamente, sostituendo alla seconda colonna di $W(x)$ i termini noti abbiamo $\begin{vmatrix} u_1(x) & 0 \\ u_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = f(x)u_1(x)$, perciò $v_2'(x) = \dfrac{f(x)u_1(x)}{w(x)}$. In conclusione, possiamo dare per $v_1(x)$ e $v_2(x)$ le seguenti formule:

$$v_1(x) = -\int \frac{u_2(x) f(x)}{w(x)} dx\,; \qquad\qquad v_2(x) = \int \frac{u_1(x) f(x)}{w(x)} dx\,,$$

dove con il simbolo di integrale indefinito indichiamo una qualsiasi primitiva nell'intervallo *J*.

ESEMPIO 7.1. Determinare l'integrale generale dell'ED $y'' - y = \frac{1}{e^x + 1}$.

SOLUZIONE. $J = R$. Il sistema fondamentale è $u_1 = e^x$, $u_2 = e^{-x}$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o = c_1 e^x + c_2\, e^{-x}$. Abbiamo $w(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$. Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1 e v_2:

$v_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^x \left(e^x + 1\right)} dx$; ponendo $e^x = t$ si ha $e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$. Quindi

$v_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 (t+1)} dt = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{B}{t^2} dt + \int \frac{C}{(t+1)} dt \right\}$ dove risulta $A = -1$ e $B = C = 1$. Quindi

$$v_1(x) = \frac{1}{2} \left\{ -\ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|t+1| \right\} = \frac{-x - e^{-x} + \ln\left(e^x + 1\right)}{2}$$

Il calcolo di $v_2(x)$ è più semplice, infatti

$$v_2(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln\left(e^x + 1\right).$$

Risulta, allora, $\bar{y} = \frac{-xe^x - 1 + e^x \ln\left(e^x + 1\right) - e^{-x} \ln\left(e^x + 1\right)}{2}$. Perciò l'integrale generale è:

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2\, e^{-x} + \frac{-xe^x - 1 + e^x \ln\left(e^x + 1\right) - e^{-x} \ln\left(e^x + 1\right)}{2}, \quad \forall c_1, c_2 \in R \ \text{ e } \ \forall x \in R.$$

ESEMPIO 7.2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y' = \frac{1}{\sin x} \\ y(\pi/2) = 1 \\ y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$.

SOLUZIONE. La soluzione è definita in $J = (0, \pi)$, in quanto più ampio intervallo di continuità della funzione $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ contenente il punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$. L'equazione caratteristica dell'omogenea è $\alpha^2 + \alpha = 0$, che ammette due radici reali e distinte $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -1$. Il sistema fondamentale è $u_1 = 1$, $u_2 = e^{-x}$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o = c_1 + c_2\, e^{-x}$. Il wronskiano è $w(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -e^{-x}$. Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1 e v_2:

$$v_1(x)=\int \frac{1}{\sin x}dx=\int \frac{1}{t}dt=\ln t=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right);$$

$$v_2(x)=-\int \frac{e^x}{\sin x}dx.$$

Il secondo integrale non è elementarmente esprimibile, perciò introduciamo la funzione $E(x)=\int_{\pi/2}^{x}\frac{e^t}{\sin t}dt$, grazie alla quale possiamo scegliere come $v_2(x)$ la funzione $-E(x)$. Troviamo così $\overline{y}=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)-e^{-x}E(x)$. Perciò l'integrale generale è:

$$y=c_1+e^{-x}\left(c_2-E(x)\right)+\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

Si ha $y'=e^{-x}\left(-\frac{e^x}{\sin x}-c_2+E(x)\right)+\frac{1}{\sin x}$, quindi imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases}1=c_1+c_2e^{-\frac{\pi}{2}}\\ 0=-c_2e^{-\frac{\pi}{2}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1=1\\ c_2=0\end{cases}.$$

Perciò la soluzione del problema è: $y=1-e^{-x}\,E(x)+\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$, $\forall x\in J=(0,\pi)$.

ESEMPIO 7.3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y''-2y'+y=\frac{e^{2x}}{x^2}\\ y(1)=6\\ y'(1)=-1\end{cases}$.

SOLUZIONE. La soluzione è definita in $J=(0,+\infty)$. L'equazione caratteristica dell'omogenea è $\alpha^2-2\alpha+1=0$, che ammette una radice reale doppia $\alpha_{1,2}=1$. Il sistema fondamentale è $u_1=e^x$, $u_2=xe^x$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o=(c_1+c_2x)e^x$. Il wronskiano è $w(x)=\begin{vmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (x+1)e^x\end{vmatrix}=e^{2x}\begin{vmatrix}1 & x\\ 1 & (x+1)\end{vmatrix}=e^{2x}\begin{vmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=e^{2x}$. Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1 e v_2:

$$v_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^x\\ \frac{e^{2x}}{x^2} & (x+1)e^x\end{vmatrix}}{e^{2x}}dx=-\int\frac{e^x}{x}dx;$$

$$v_2(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & \frac{e^{2x}}{x^2}\end{vmatrix}}{e^{2x}}dx=\int\frac{e^x}{x^2}dx=-\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x}dx.$$

L'integrale $\int \frac{e^x}{x}dx$ non è elementarmente esprimibile, perciò introduciamo la funzione $E(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$, grazie alla quale possiamo scegliere come $v_1(x)$ la funzione $-E(x)$ e come $v_2(x)$ la funzione $E(x)-\frac{e^x}{x}$. Troviamo così $\overline{y}=-e^x E(x)+xe^x\left(E(x)-\frac{e^x}{x}\right)$. Perciò l'integrale generale è:

$$y=e^x\left[c_1+c_2x+\left(x-1\right)E(x)-e^x\right].$$

Si ha $y'=e^x\left(c_1+c_2x+(x-1)E(x)-e^x+c_2+E(x)+(x-1)\frac{e^x}{x}-e^x\right)$, quindi imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases}6=ec_1+ec_2-e^2\\ -1=ec_1+2ec_2-2e^2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_1+c_2=\frac{6}{e}+e\\ c_1+2c_2=2e-\frac{1}{e}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_1=\frac{13}{e}\\ c_2=\frac{e^2-7}{e}\end{cases}.$$

Perciò la soluzione del problema è: $y=e^x\left(\frac{13}{e}-\frac{e^2-7}{e}x+\left(x-1\right)E\left(x\right)-e^x\right)$, $\forall x\in J=\left(0,+\infty\right)$.

ESEMPIO 7.4. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y''-5y'+4y=\frac{e^{4x}}{\sqrt{x^2+16}}\\ y\left(3\right)=0\\ y'\left(3\right)=2\end{cases}$.

SOLUZIONE. La soluzione è definita in $J=R$. L'equazione caratteristica dell'omogenea è $\alpha^2-5\alpha+4=0$, che ammette due radici reali e distinte $\alpha_1=1$ e $\alpha_2=4$. Il sistema fondamentale è $u_1=e^x$, $u_2=e^{4x}$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o=c_1e^x+c_2e^{4x}$. Il wronskiano è $w(x)=\begin{vmatrix}e^x & e^{4x}\\ e^x & 4e^{4x}\end{vmatrix}=e^{5x}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3e^{5x}$. Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1 e v_2:

$$v_1(x)=\frac{1}{3}\int\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{4x}\\ \frac{e^{4x}}{\sqrt{x^2+16}} & 4e^{4x}\end{vmatrix}}{e^{5x}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{x^2+16}}dx;$$

$$v_2(x)=\frac{1}{3}\int\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0\\ e^x & \frac{e^{4x}}{\sqrt{x^2+16}}\end{vmatrix}}{e^{5x}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1}}dx=\frac{1}{3}\operatorname{sett\,sinh}\left(\frac{x}{4}\right).$$

L'integrale $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x^2+16}}dx$ non è elementarmente esprimibile, perciò introduciamo la funzione $E(x)=\int_3^x \frac{e^{3t}}{\sqrt{t^2+16}}dt$, grazie alla quale possiamo scegliere come $v_1(x)$ la funzione $-\frac{E(x)}{3}$.

Troviamo così $\overline{y}=\frac{1}{3}\left(e^{4x}\operatorname{sett}\sinh\left(\frac{x}{4}\right)-e^x E(x)\right)$. Perciò l'integrale generale è:

$$y=c_1e^x+c_2e^{4x}+\frac{1}{3}\left(e^{4x}\operatorname{sett}\sinh\left(\frac{x}{4}\right)-e^xE(x)\right).$$

Si ha $y'=c_1e^x+4c_2e^{4x}+\frac{1}{3}\left(4e^{4x}\operatorname{sett}\sinh\left(\frac{x}{4}\right)-e^xE(x)\right)$, quindi imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 0=c_1e^3+c_2e^{12}+\frac{1}{3}e^{12}\operatorname{sett}\sinh\frac{3}{4} \\ 2=c_1e^3+4c_2e^{12}+\frac{4}{3}e^{12}\operatorname{sett}\sinh\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2e^9=-\frac{1}{3}e^9\operatorname{sett}\sinh\frac{3}{4} \\ c_1+4c_2e^9=2e^{-3}-\frac{4}{3}e^9\operatorname{sett}\sinh\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1=-\frac{2e^{-3}}{3} \\ c_2=\frac{1}{3}\left(2e^{-12}-\operatorname{sett}\sinh\frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-\frac{2e^{-3}}{3} \\ c_2=\frac{1}{3}\left(2e^{-12}-\ln 2\right) \end{cases} \quad \text{perché} \quad \operatorname{sett}\sinh t=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right).$$

Perciò la soluzione del problema è: $y=-\frac{2}{3}e^{x-3}+\frac{1}{3}\left(2e^{-12}-\ln 2\right)e^{4x}+\frac{1}{3}\left(e^{4x}\operatorname{sett}\sinh\left(\frac{x}{4}\right)-e^xE(x)\right)$, $\forall x\in J=R$.

ESEMPIO 7.5. Integrare l'ED $y'''-3y''+12y'-10y=\frac{9e^x}{\cos^2(3x)}$, con $x\in J=\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\alpha^3-3\alpha^2+12\alpha-10=(\alpha-1)\left(\alpha^2-2\alpha+10\right)=0$, che ammette una radice reale semplice $\alpha_1=1$ e due complesse e coniugate $\alpha_{2,3}=1\pm 3i$. Il sistema fondamentale è $u_1=e^x$, $u_2=e^x\cos(3x)$, $u_2=e^x\sin(3x)$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o=e^x\left(c_1+c_2\cos(3x)+c_3\sin(3x)\right)$. Il wronskiano è

$$w(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^x\cos(3x) & e^x\sin(3x) \\ e^x & e^x\left(\cos(3x)-3\sin(3x)\right) & e^x\left(\sin(3x)+3\cos(3x)\right) \\ e^x & e^x\left(-8\cos(3x)-6\sin(3x)\right) & e^x\left(6\cos(3x)-8\sin(3x)\right) \end{vmatrix}=$$

$$=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & \cos(3x) & \sin(3x) \\ 1 & \cos(3x)-3\sin(3x) & \sin(3x)+3\cos(3x) \\ 1 & -8\cos(3x)-6\sin(3x) & 6\cos(3x)-8\sin(3x) \end{vmatrix}=$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & \cos(3x) & \sin(3x) \\ 0 & 3\sin(3x) & -3\cos(3x) \\ 0 & 9\cos(3x)+6\sin(3x) & -6\cos(3x)+9\sin(3x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 3\sin(3x) & -3\cos(3x) \\ 9\cos(3x)+6\sin(3x) & -6\cos(3x)+9\sin(3x) \end{vmatrix} = 27e^{3x}\begin{vmatrix} \sin(3x) & -\cos(3x) \\ \cos(3x) & +\sin(3x) \end{vmatrix} =$$

$$= 27e^{3x}\left(\sin^2(3x)+\cos^2(3x)\right) = 27e^{3x}.$$

Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1, v_2 e v_3:

$$v_1(x) = \frac{1}{27}\int \frac{\frac{9e^x}{\cos^2(3x)}\begin{vmatrix} e^x\cos(3x) & e^x\sin(3x) \\ e^x\left(\cos(3x)-3\sin(3x)\right) & e^x\left(\sin(3x)+3\cos(3x)\right) \end{vmatrix}}{e^{3x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{\begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -\sin(3x) & \cos(3x) \end{vmatrix}}{\cos^2(3x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(3x)}\,dx = \frac{\tan(3x)}{3};$$

$$v_2(x) = \frac{1}{27}\int \frac{-\frac{9e^x}{\cos^2(3x)}\begin{vmatrix} e^x & e^x\sin(3x) \\ e^x & e^x\left(\sin(3x)+3\cos(3x)\right) \end{vmatrix}}{e^{3x}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sin(3x) \\ 0 & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}{\cos^2(3x)}\,dx = -\int \frac{1}{\cos(3x)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{3x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{3x}{2}\right)}\right);$$

$$v_3(x) = \frac{1}{27}\int \frac{\frac{9e^x}{\cos^2(3x)}\begin{vmatrix} e^x & e^x\cos(3x) \\ e^x & e^x\left(\cos(3x)-3\sin(3x)\right) \end{vmatrix}}{e^{3x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(3x) \\ 0 & -3\sin(3x) \end{vmatrix}}{\cos^2(3x)}\,dx = -\int \frac{\sin(3x)}{\cos^2(3x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\cos(3x)\right)}{\cos^2(3x)} = \frac{1}{3\cos(3x)};$$

Troviamo così $\bar{y} = \frac{e^x}{3}\left(2\tan(3x)+\ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{3x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{3x}{2}\right)}\right)\cos(3x)\right).$

ESEMPIO 7.6. Integrare l'ED $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ nell'intervallo $J=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

SOLUZIONE. L'integrale generale dell'omogenea è $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, cosicché si trova immediatamente $w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$. Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1 e v_2:

$$v_1(x) = -\int \operatorname{sen} x \frac{1}{\cos x} dx = \log \cos x\,;$$
$$v_2(x) = \int \cos x \frac{1}{\cos x} dx = x;$$

da cui risulta $\bar{y} = \cos x \cdot \log \cos x + x \operatorname{sen} x$. Perciò l'integrale generale è:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \cos x \log \cos x + x \operatorname{sen} x = (c_1 + \log \cos x)\cos x + (c_2 + x)\operatorname{sen} x\,.$$

ESEMPIO 7.7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{x} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 2. \end{cases}$

SOLUZIONE. Visto il campo di esistenza di $f(x)$ e le condizioni iniziali, è chiaro che sarà $J = (0\ ,\ +\infty)$. L'integrale generale dell'omogenea è $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, perciò $w(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}$.

Abbiamo allora:

$$v_1(x) = -\int \frac{e^{2x} \frac{e^{2x}}{x}}{e^{3x}} dx = -\int \frac{e^x}{x} dx\,;$$

$$v_2(x) = \int \frac{e^x \frac{e^{2x}}{x}}{e^{3x}} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x\,.$$

Il primo integrale non è elementarmente esprimibile, perciò introduciamo la funzione $E(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, grazie alla quale possiamo scegliere come $v_1(x)$ la funzione $-E(x)$. Troviamo così $\bar{y} = -E(x)e^x + e^{2x} \log x$, da cui l'integrale generale $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - E(x)e^x + e^{2x} \log x$.

Il calcolo di y' dà $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - E(x)e^x + 2e^{2x} \log x$, cosicché l'applicazione delle condizioni iniziali porta al sistema $\begin{cases} 1 = c_1 e + c_2 e^2 \\ 2 = c_1 e + 2c_2 e^2, \end{cases}$ la cui soluzione è $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{e^2}$. In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è $y = e^{2x-2} - E(x)e^x + e^{2x} \log x$.

ESEMPIO 7.8. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} \\ y(\pi/2) = 1 \\ y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$.

SOLUZIONE. La soluzione è definita in $J=(0,\pi)$**.** L'equazione caratteristica dell'omogenea è $\alpha^2+1=0$, che ammette due radici complesse e coniugate $\alpha_{1,2}=\pm i$. Il sistema fondamentale è $u_1=\cos x$, $u_2=\sin x$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o=c_1\cos x+c_2\sin x$.

Si trova immediatamente $w(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \mathrm{sen}x\\ -\mathrm{sen}x & \cos x\end{vmatrix}=1$. Possiamo quindi effettuare il calcolo di v_1 e v_2:

$$v_1(x)=\int\begin{vmatrix}0 & \mathrm{sen}x\\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x\end{vmatrix}dx=-\int dx=-x;$$

$$v_2(x)=\int\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x}\end{vmatrix}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln(\sin x);$$

da cui risulta $\bar{y}=-x\cos x+\mathrm{sen}x\log(\sin x)$. Perciò l'integrale generale è:

$$y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x-x\cos x+\mathrm{sen}x\log(\sin x).$$

Si ha $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x+x\sin x+\cos x\ln(\sin x)$, quindi imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases}1=c_2\\ 0=-c_1+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c_1=1\\ c_2=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Perciò la soluzione del problema è: $y=\cos x+\dfrac{\pi}{2}\mathrm{sen}\,x-x\cos x+\mathrm{sen}x\log(\sin x)$, $\forall x\in J=(0,\pi)$.

ESEMPIO 7.9. Determinare l'integrale generale dell'ED $y''-4y'+13y=xe^{2x}\cos 3x$.

SOLUZIONE. Questo è un caso in cui il metodo dei coefficienti indeterminati è teoricamente applicabile, ma con calcoli molto lunghi. Infatti l'integrale generale dell'omogenea è $c_1e^{2x}\cos 3x+c_2e^{2x}\mathrm{sen}3x$. Siccome poi i numeri $2\pm 3i$ sono radici semplici dell'equazione caratteristica, bisognerebbe cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}=e^{2x}\left[(Ax^2+Bx)\cos 3x+(Cx^2+Dx)\mathrm{sen}3x\right].$$

Per evitare calcoli eccessivamente lunghi, possiamo applicare il metodo della variazione delle costanti. Abbiamo infatti $w(x)=\begin{vmatrix}e^{2x}\cos 3x & e^{2x}\mathrm{sen}3x\\ e^{2x}(2\cos 3x-3\mathrm{sen}3x) & e^{2x}(2\mathrm{sen}3x+3\cos 3x)\end{vmatrix}=3e^{4x}$. Allora:

$$v_1(x)=-\int\frac{e^{2x}\mathrm{sen}3x\cdot xe^{2x}\cos 3x}{3e^{4x}}dx=-\frac{1}{3}\int x\,\mathrm{sen}3x\cos 3x\,dx;$$

$$v_2(x)=\int\frac{e^{2x}\cos 3x\cdot xe^{2x}\cos 3x}{3e^{4x}}dx=\frac{1}{3}\int x\cos^2 3x\,dx;$$

Il primo integrale si calcola facilmente scrivendo $\operatorname{sen}3x\cos 3x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}6x$; integrando per parti, si trova $v_1(x) = \frac{x}{36}\cos 6x - \frac{1}{216}\operatorname{sen}6x$. Per il secondo, scriviamo $\cos^2 3x = \frac{1+\cos 6x}{2}$, da cui, integrando ancora per parti, troviamo $v_2(x) = \frac{x^2}{12} + \frac{x}{36}\operatorname{sen}6x + \frac{1}{216}\cos 6x$. Perciò:

$$\overline{y} = e^{2x}\cos 3x\left(\frac{x}{36}\cos 6x - \frac{1}{216}\operatorname{sen}6x\right) + e^{2x}\operatorname{sen}3x\left(\frac{x^2}{12} + \frac{x}{36}\operatorname{sen}6x + \frac{1}{216}\cos 6x\right) =$$

$$= e^{2x}\left[\frac{x^2}{12}\operatorname{sen}3x + \frac{x}{36}\cos 6x\cos 3x - \frac{1}{216}\operatorname{sen}6x\cos 3x + \frac{x}{36}\operatorname{sen}6x\operatorname{sen}3x + \frac{1}{216}\cos 6x\operatorname{sen}3x\right].$$

Il risultato può essere lasciato in questa forma, ma si può anche notare che $\cos 6x\cos 3x + \operatorname{sen}6x\operatorname{sen}3x$ è uguale a $\cos(6x - 3x) = \cos 3x$, e che $\operatorname{sen}6x\cos 3x - \cos 6x\operatorname{sen}3x$ è $\operatorname{sen}(6x - 3x) = \operatorname{sen} 3x$. Perciò si può scrivere $\overline{y} = e^{2x}\left[\frac{x^2}{12}\operatorname{sen}3x + \frac{x}{36}\cos 3x - \frac{1}{216}\operatorname{sen}3x\right]$. Ma osserviamo ulteriormente che è inutile inserire nella soluzione particolare funzioni che già fanno parte dell'integrale generale. In altre parole, si può anche scegliere $\overline{y} = e^{2x}\left[\frac{x^2}{12}\operatorname{sen}3x + \frac{x}{36}\cos 3x\right]$, per cui l'integrale generale è $y = e^{2x}\left[c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen}3x + \frac{x^2}{12}\operatorname{sen}3x + \frac{x}{36}\cos 3x\right]$.

Concludiamo questo paragrafo osservando che il metodo della variazione delle costanti si può estendere alle ED lineari di ordine $n \geq 3$. Il procedimento è il seguente: in primo luogo occorre scrivere la matrice wronskiana e calcolarne il determinante $w(x)$. Si scrive quindi la matrice inversa $W^{-1}(x)$, utilizzando la nota regola per la quale si sostituisce a ciascun termine il suo complemento algebrico, si dividono i termini per il determinante, infine si traspone la matrice così trovata. In realtà, nel nostro caso non serve calcolare l'*intera* matrice inversa, perché alla fine occorre conoscerne solo una colonna: precisamente, si calcoleranno esplicitamente solo i complementi algebrici dell'ultima riga di $W(x)$, sottintendendo gli altri, col risultato che alla fine si saranno calcolati esplicitamente solo gli elementi dell'ultima colonna di $W^{-1}(x)$. Dette $z_1(x)$, $z_2(x)$, ..., $z_n(x)$ queste funzioni, potremo calcolare $v_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., n$) con la formula $v_i(x) = \int z_i(x) f(x)dx$.

ESEMPIO 7.10. Determinare l'integrale generale dell'ED $y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

SOLUZIONE. L'integrale generale dell'omogenea è $c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$. La matrice wronskiana è $W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{pmatrix}$, e da qui si ha facilmente $w(x) = e^x \cdot e^x \cdot e^x \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = 2e^{3x}$. Ora determiniamo la matrice inversa, calcolando però esplicitamente solo i complementi algebrici dei termini dell'ultima riga:

$$W^{-1}(x)=\frac{1}{2e^{3x}}\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x^2e^{2x} & -2xe^{2x} & e^{2x}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \frac{x^2}{2}e^{-x}\\ \cdots & \cdots & -xe^{-x}\\ \cdots & \cdots & \frac{1}{2}e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Abbiamo allora:

$v_1(x)=\int\frac{x^2}{2}e^{-x}\cdot\frac{e^x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg}x)$;

$v_2(x)=\int -xe^{-x}\cdot\frac{e^x}{x^2+1}dx=-\int\frac{x}{x^2+1}dx=-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$;

$v_3(x)=\int\frac{e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$,

da cui la soluzione particolare $\bar{y}=\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg}x)e^x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)xe^x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\cdot x^2e^x=$ $=\frac{e^x}{2}\left(x+(x^2-1)\operatorname{arctg}x-x\log(x^2+1)\right)$. Ma anche qui notiamo che il termine $\frac{xe^x}{2}$ è inutile, in quanto già facente parte dell'integrale generale dell'omogenea. Abbiamo allora:

$$y=e^x\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\frac{x^2-1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}\log(x^2+1)\right).$$

ESEMPIO 7.11. Determinare l'integrale generale dell'ED $y'''-y''-6y'=\frac{30e^{3x}}{e^{2x}+4}$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\alpha^3-\alpha^2-6\alpha=\alpha(\alpha+2)(\alpha-3)=0$, che ammette tre radici reali semplici $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-2$ e $\alpha_3=3$. Il sistema fondamentale è $u_1=1$, $u_2=e^{-2x}$, $u_2=e^{3x}$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_o=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}$. L'integrale particolare ha la forma $\bar{y}=v_1+v_2e^{-2x}+v_3e^{3x}$.

La matrice wronskiana è $W(x)=\begin{pmatrix}1 & e^{-2x} & e^{3x}\\ 0 & -2e^{-2x} & 3e^{3x}\\ 0 & 4e^{-2x} & 9e^{3x}\end{pmatrix}$, e da qui si ha facilmente $w(x)=e^x\cdot e^x\cdot$ $e^x\cdot$ $w(x)=6e^x\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-30e^x$.

Abbiamo allora:

$$v_1(x)=-\frac{1}{30}\int\frac{\frac{30e^{3x}}{e^{2x}+4}\begin{vmatrix}e^{-2x} & e^{3x}\\ -2e^{-2x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}}{e^x}dx=-\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+4}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}dx=-5\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+4}dx=,$$

(si pone $e^x=t\Rightarrow e^xdx=dt\Rightarrow tdx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$)

$$=-5\int\frac{t^3}{t^2+4}\frac{dt}{t}=-5\int\frac{t^2}{t^2+4}dt=-5\int\left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt=-5t+10\arctan\left(\frac{t}{2}\right)=-5e^x+10\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right).$$

$$v_2(x)=\frac{1}{30}\int\frac{\begin{vmatrix}\frac{30e^{3x}}{e^{2x}+4} & \begin{matrix}1 & e^{3x}\\0 & 3e^{3x}\end{matrix}\end{vmatrix}}{e^x}dx=\int\frac{e^{5x}}{e^{2x}+4}\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{vmatrix}dx=3\int\frac{e^{5x}}{e^{2x}+4}dx=$$

(stessa sostituzione di prima)

$$=3\int\frac{t^5}{t^2+4}\frac{dt}{t}=3\int\frac{t^4}{t^2+4}dt=\text{ (divido i polinomi) }=3\int\left(t^2-\frac{4t^2}{t^2+4}\right)dt=$$

$$=3\int\left(t^2-4+\frac{16}{t^2+4}\right)dt=t^3-12t+24\arctan\left(\frac{t}{2}\right)=e^{3x}-12e^x+24\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right).$$

$$v_3(x)=-\frac{1}{30}\int\frac{\begin{vmatrix}\frac{30e^{3x}}{e^{2x}+4} & \begin{matrix}1 & e^{-2x}\\0 & -2e^{-2x}\end{matrix}\end{vmatrix}}{e^x}dx=-\int\frac{1}{e^{2x}+4}\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{vmatrix}dx=2\int\frac{1}{e^{2x}+4}dx=$$

(stessa sostituzione di prima. In questo caso, si può porre anche $e^{2x}=t$)

$$=2\int\frac{1}{t^2+4}\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{t}{t^2+4}-\frac{1}{t}\right)dt==-\frac{1}{4}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{1}{2}\ln|t|=-\frac{1}{4}\ln\left(e^{2x}+4\right)+\frac{1}{2}x.$$

La soluzione particolare è

$$\overline{y}=-5e^x+10\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)+\left(e^{3x}-12e^x+24\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)\right)e^{-2x}+\left(-\frac{1}{4}\ln\left(e^{2x}+4\right)+\frac{1}{2}x\right)e^{3x}.$$

Abbiamo allora: $y=y_o+\overline{y}$.

ESEMPIO 7.12. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}e^x y''-2\sqrt{x^2y'}=0\\ y(1)=-1\\ y'(1)=1\end{cases}$.

SOLUZIONE. Nell'ED del 2 ordine manca il termine y; quindi essa può essere ridotta ad una ED del 1 ordine con la sostituzione $v=y'$ (da cui segue $v'=y''$). Quindi l'ED diventa $e^xv'-2\sqrt{x^2v}=0$, con la condizione iniziale sulla v: $v(1)=y'(1)=1$. L'ED è a variabili separabili; infatti, dopo aver osservato che la funzione $v=0$ non è una soluzione del problema in quanto non soddisfa la condizione iniziale, essa si può scrivere

$$\frac{dv}{2\sqrt{v}}=\frac{|x|}{e^x}dx.$$

Quello che si può stabilire a priori sulla soluzione v del problema è che essa potrebbe essere definita su tutto R ed è positiva (cioè il suo grafico sta tutto sopra l'asse x e passa per il punto di coordinate $(1,1)$). Ricordiamo inoltre che $v=y'$, quindi, in realtà, possiamo stabilire che la vera soluzione y potrebbe essere definita su tutto R e sarà strettamente crescente. Integrando si ha

$$\int\frac{dv}{2\sqrt{v}}=\int\frac{|x|}{e^x}dx+c. \tag{7.6}$$

Calcoliamo i due integrali (trascurando la costante arbitraria finale perché già considerata nella formula (7.6)):

$$\int \frac{dv}{2\sqrt{v}} = \sqrt{v}\,;$$

$$\int \frac{|x|}{e^x}dx = \int |x|e^{-x}dx = \begin{cases} \int_0^x te^{-t}dt + c & \text{se } x \geq 0 \\ \int_0^x -te^{-t}dt + c & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ (nel nostro caso, come detto sopra, prendo $c = 0$).

(Qui si è usata la 2 tecnica dell'esercizio 7.1).

Si ha:

se $x \geq 0$, $\int_0^x te^{-t}dt = -\int_0^x td\left(e^{-t}\right) = -te^{-t}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-t}\Big|_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$.

Basta calcolare un solo integrale definito perché l'altro è l'esatto opposto. Quindi

$$\int \frac{|x|}{e^x}dx = \begin{cases} -e^{-x}(x+1)+1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x}(x+1)-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Allora abbiamo

$$\sqrt{v} = \begin{cases} -e^{-x}(x+1)+1+c & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x}(x+1)-1+c & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dalla condizione iniziale sulla v: $v(1)=1$ si ha $1 = -2e^{-1}+1+c \Rightarrow c = 2e^{-1}$ (ovviamente si deve considerare l'espressione per $x \geq 0$, perché 1 > 0). Quindi

$$\sqrt{v} = \begin{cases} -e^{-x}(x+1)+1+2e^{-1} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x}(x+1)-1+2e^{-1} & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y' = v = \begin{cases} \left(-e^{-x}(x+1)+1+2e^{-1}\right)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \left(e^{-x}(x+1)-1+2e^{-1}\right)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

quindi $y = \begin{cases} \int_0^x \left(-e^{-x}(x+1)+1+2e^{-1}\right)^2 + c & \text{se } x \geq 0 \\ \int_0^x \left(e^{-x}(x+1)-1+2e^{-1}\right)^2 + c & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (ho usato ancora la stessa tecnica).

Se $x \geq 0$;

$$\int_0^x \left(-e^{-t}(t+1)+1+2e^{-1}\right)^2 dt = \int_0^x e^{-2t}(t+1)^2 dt + \left(1+2e^{-1}\right)^2 \int_0^x dt - 2\left(1+2e^{-1}\right)\int_0^x e^{-t}(t+1)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^x (t+1)^2 d\left(e^{-2t}\right) + \left(1+2e^{-1}\right)^2 x + 2\left(1+2e^{-1}\right)\int_0^x (t+1)d\left(e^{-t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{(t+1)^2 e^{-2t}\Big|_0^x - 2\int_0^x (t+1)e^{-2t}dt\right\} + \left(1+2e^{-1}\right)^2 x + 2\left(1+2e^{-1}\right)\left\{(t+1)e^{-t}\Big|_0^x - \int_0^x e^{-t}dt\right\} =$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 e^{-2x}-1+\int_0^x (t+1)\,d\left(e^{-2t}\right)\right\}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)\left\{(x+1)e^{-x}-1+e^{-t}\Big|_0^x\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 e^{-2x}-1+(t+1)e^{-2t}\Big|_0^x-\int_0^x e^{-2t}dt\right\}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)\left\{(x+1)e^{-x}-1+e^{-x}-1\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 e^{-2x}-1+(x+1)e^{-2x}-1+\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^x\right\}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)\left\{(x+2)e^{-x}-2\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(x+1)^2 e^{-2x}-1+(x+1)e^{-2x}-1+\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}\right\}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)\left\{(x+2)e^{-x}-2\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}-\frac{5}{2}\right\}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)\left\{(x+2)e^{-x}-2\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+\frac{5}{4}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)(x+2)e^{-x}-4\left(1+2e^{-1}\right).$$

Se $x<0$;

$$\int_0^x \left(e^{-t}(t+1)-1+2e^{-1}\right)^2 dt=\int_0^x e^{-2t}(t+1)^2 dt+\left(-1+2e^{-1}\right)^2\int_0^x dt-2\left(1-2e^{-1}\right)\int_0^x e^{-t}(t+1)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}-\frac{5}{2}\right\}+\left(-1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1-2e^{-1}\right)\left\{(x+2)e^{-x}-2\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+\frac{5}{4}+\left(-1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1-2e^{-1}\right)(x+2)e^{-x}-4\left(1-2e^{-1}\right).$$

Si ottiene

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+\frac{5}{4}+\left(1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1+2e^{-1}\right)(x+2)e^{-x}-4\left(1+2e^{-1}\right)+c & \text{se } x\geq 0\\ -\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x}+\frac{5}{4}+\left(-1+2e^{-1}\right)^2 x+2\left(1-2e^{-1}\right)(x+2)e^{-x}-4\left(1-2e^{-1}\right)+c & \text{se } x<0\end{cases}.$$

Dalla condizione iniziale $y(1)=-1$ calcoliamo la costante *c*:

$$-1=-\frac{1}{2}\left(1+3+\frac{3}{2}\right)e^{-2}+\frac{5}{4}+\left(1+2e^{-1}\right)^2+2\left(1+2e^{-1}\right)(3)e^{-1}-4\left(1+2e^{-1}\right)+c$$

$$-1=-\frac{11}{4}e^{-2}+\frac{5}{4}+1+4e^{-1}+4e^{-2}+6e^{-1}+12e^{-2}-4-8e^{-1}+c \qquad \Rightarrow \quad c=\frac{3}{4}-\frac{53}{4}e^{-2}-2e^{-1}.$$

Equazione di Eulero

Si è già osservato che per un'ED lineare omogenea (anche in forma normale) a coefficienti variabili non è noto alcun metodo generale per trovarne *n* soluzioni indipendenti e quindi per scriverne l'integrale generale. Tuttavia esistono alcuni casi particolari in cui questo è possibile; uno di questi si ha con l'*equazione di Eulero*.

Essa nel caso omogeneo appare nella forma normale

$$y^{(n)}+\frac{a_1}{ax+b}y^{(n-1)}+\frac{a_2}{(ax+b)^2}y^{(n-2)}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}y'+\frac{a_n}{(ax+b)^n}y=0\,, \tag{8.1}$$

dove a e b sono costanti reali (in particolare $a \neq 0$). La (8.1) va risolta nell'intervallo $\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$ oppure $\left(-\infty,-\frac{b}{a},\right)$. Vediamo il metodo di risoluzione nel caso particolare $n = 3$ (nel caso $n = 2$ si procede in modo analogo). In questo caso L'ED è

$$y'''+\frac{a_1}{ax+b}y''+\frac{a_2}{(ax+b)^2}y'+\frac{a_3}{(ax+b)^3}y=0\,. \tag{8.2}$$

L'idea è quella di operare un cambiamento di variabile per ridurre la (8.2) ad un ED lineare a coefficienti costanti. Si pone allora $t=\ln(ax+b)$, nel caso $x>-\frac{b}{a}$, altrimenti si pone $t=\ln(-ax-b)$, nel caso $x<-\frac{b}{a}$. Supponiamo $x>-\frac{b}{a}$; come conseguenza al cambiamento di variabile, la funzione incognita y può essere interpretata come una funzione composta del tipo $y(x)=Y\left[\varphi(x)\right]$, dove $t=\varphi(x)=\ln(ax+b)$. Quindi, dal teorema della derivabilità di una funzione composta, si ha

$$y'(x)=\frac{dY}{dt}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{dY}{dt}\frac{a}{ax+b}\,,$$

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dY}{dt}\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d^2Y}{dt^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{dY}{dt}\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d^2Y}{dt^2}\frac{a^2}{(ax+b)^2}-\frac{dY}{dt}\frac{a^2}{(ax+b)^2}\,,$$

$$y'''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{dY}{dt}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)=\frac{d^3Y}{dt^3}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^3+2\frac{d^2Y}{dt^2}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2Y}{dt^2}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{dY}{dt}\frac{d^3\varphi}{dx^3}=$$

$$=\frac{d^3Y}{dt^3}\frac{a^3}{(ax+b)^3}-3\frac{d^2Y}{dt^2}\frac{a^3}{(ax+b)^3}+2\frac{dY}{dt}\frac{a^3}{(ax+b)^3}\,.$$

Sostituendo nella (8.2) si ottiene

$$\left(\frac{d^3Y}{dt^3}\frac{a^3}{(ax+b)^3}-3\frac{d^2Y}{dt^2}\frac{a^3}{(ax+b)^3}+2\frac{dY}{dt}\frac{a^3}{(ax+b)^3}\right)+\frac{a_1}{(ax+b)}\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\frac{a^2}{(ax+b)^2}-\frac{dY}{dt}\frac{a^2}{(ax+b)^2}\right)+$$

$$+\frac{a_2}{(ax+b)^2}\left(\frac{dY}{dt}\frac{a}{(ax+b)}\right)+\frac{a_3}{(ax+b)^3}Y=0$$

cioè, moltiplicando entrambe i membri per $(ax+b)^3$,

$$a^3\frac{d^3Y}{dt^3}+\left(a_1a^2-3a^3\right)\frac{d^2Y}{dt^2}+\left(2a^3-a_1a^2+a_2a\right)\frac{dY}{dt}+a_3Y=0\,.$$

Quindi la (8.2) si è trasformata in una ED lineare a coefficienti costanti la cui l'equazione caratteristica è

$$a^3\alpha^3+\left(a_1a^2-3a^3\right)\alpha^2+\left(2a^3-a_1a^2+a_2a\right)\alpha+a_3=0\,.$$

Allora si possono avere i seguenti casi:

1) L'equazione caratteristica ammette 3 radici reali e distinte α_1, α_2 α_3 e quindi la soluzione generale è $y = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 e^{\alpha_3 t}$. Ma $t = \ln(ax+b)$ e quindi si ha $y = c_1(ax+b)^{\alpha_1} + c_2(ax+b)^{\alpha_2} + c_3(ax+b)^{\alpha_3}$;
2) L'equazione caratteristica ammette una radice reale semplice α_1 e una radice reale doppia α_2 e quindi la soluzione generale è $y = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + c_3 t e^{\alpha_2 t}$. Ma $t = \ln(ax+b)$ e quindi si ha $y = c_1(ax+b)^{\alpha_1} + c_2(ax+b)^{\alpha_2} + c_3(ax+b)^{\alpha_2}\ln(ax+b)$;
3) L'equazione caratteristica ammette una radice reale tripla α_1 e quindi la soluzione generale è $y = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 t e^{\alpha_1 t} + c_3 t^2 e^{\alpha_1 t}$. Ma $t = \ln(ax+b)$ e quindi si ha $y = c_1(ax+b)^{\alpha_1} + c_2(ax+b)^{\alpha_1}\ln(ax+b) + c_3(ax+b)^{\alpha_1}\left(\ln(ax+b)\right)^2$;
4) L'equazione caratteristica ammette una radice reale semplice α_1 e due radici complesse e coniugate semplici $\alpha_2 \pm i\beta_2$ e quindi la soluzione generale è $y = c_1 e^{\alpha_1 t} + e^{\alpha_2 t}\left(c_2\cos(\beta t) + c_3\sin(\beta t)\right)$. Ma $t = \ln(ax+b)$ e quindi si ha $y = c_1(ax+b)^{\alpha_1} + (ax+b)^{\alpha_2}\left(c_2\cos(\beta_2\ln(ax+b)) + c_3\sin(\beta_2\ln(ax+b))\right)$.

Nella pratica, non è necessario scrivere esplicitamente l'ED a coefficienti costanti che si ottiene effettuando la sostituzione suddetta; più semplicemente, si pone $y = (ax+b)^\alpha$, si deriva n volte e si sostituisce direttamente nella (8.1), ottenendo così un'equazione di grado n nell'incognita α. Tale equazione si può benissimo considerare come l'equazione caratteristica della data equazione di Eulero, ma a differenza di quanto accade per le ED a coefficienti costanti, in generale i coefficienti sono diversi da quelli dell'equazione data. Una volta trovate le radici, si ottengono immediatamente le funzioni della base, secondo lo schema detto sopra.

Nel caso che occorra risolvere la (8.1) nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{b}{a},\right)$, vale un discorso analogo a quello appena detto, con la differenza che $ax+b$ va sostituita con $-(ax+b)$.

ESEMPIO 8.1. Determinare l'integrale generale dell'ED $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$ nell'intervallo $J = (0, +\infty)$.

SOLUZIONE. In questo caso $a = 1$ e $b = 0$. Posto $y = x^\alpha$, abbiamo $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - \frac{5}{x}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{8}{x^2}x^\alpha = 0,$$

cioè $\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$, da cui le due radici $\alpha_1 = 2$ ed $\alpha_2 = 4$; si ha quindi l'integrale generale

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^4.$$

ESEMPIO 8.2. Determinare l'integrale generale dell'ED $y'' + \frac{7}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0$ nell'intervallo $J = (0, +\infty)$.

SOLUZIONE. Posto $y = x^\alpha$, abbiamo $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{7}{x}\alpha x^{\alpha-1}+\frac{9}{x^2}x^{\alpha}=0,$$

cioè $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0$, da cui la radice doppia $\alpha_1 = -3$; si ha quindi l'integrale generale

$$y=\frac{c_1}{x^3}+\frac{c_2}{x^3}\ln x.$$

ESEMPIO 8.2. Determinare l'integrale generale dell'ED $y''+\frac{7}{x}y'+\frac{9}{x^2}y=0$ nell'intervallo $J=(0,+\infty)$.

SOLUZIONE. Posto $y = x^{\alpha}$, abbiamo $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{7}{x}\alpha x^{\alpha-1}+\frac{9}{x^2}x^{\alpha}=0,$$

cioè $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = 0$, da cui la radice doppia $\alpha_1 = -3$; si ha quindi l'integrale generale

$$y=\frac{c_1}{x^3}+\frac{c_2}{x^3}\ln x.$$

ESEMPIO 8.3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''-\frac{3}{x}y'+\frac{13}{x^2}y=0 \\ y(1)=6 \\ y'(1)=-5 \end{cases}$.

SOLUZIONE. La soluzione è definita nell'intervallo $J=(0,+\infty)$. Posto $y = x^{\alpha}$, abbiamo $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-\frac{3}{x}\alpha x^{\alpha-1}+\frac{13}{x^2}x^{\alpha}=0,$$

cioè $\alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0$, da cui le radici complesse e coniugate $\alpha_{1,2}=2\pm 3i$; si ha quindi l'integrale generale

$$y=c_1x^2\cos(3\ln x)+c_2x^2\sin(3\ln x).$$

Derivando si ha $y'=2c_1x\cos(3\ln x)-3c_1x\sin(3\ln x)+2c_2x\sin(3\ln x)+3c_2x\cos(3\ln x)$.
Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 6=c_1 \\ -5=2c_1+3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=6 \\ c_2=-\frac{17}{3} \end{cases}.$$

La soluzione del problema è $y=6x^2\cos(3\ln x)-\frac{17}{3}x^2\sin(3\ln x)$.

ESEMPIO 8.4. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''-\frac{2}{x^2}y=\frac{3x}{x+2} \\ y(2)=4 \\ y'(2)=-12\ln 2 \end{cases}$.

SOLUZIONE. La soluzione è definita nell'intervallo $J=(0,+\infty)$. Determiniamo la soluzione generale dell'omogenea associata. Posto $y = x^\alpha$, abbiamo $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}-\frac{2}{x^2}x^\alpha=0,$$

cioè $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, da cui le radici reali e distinte $\alpha_1=-1$ e $\alpha_2=2$; si ha quindi l'integrale generale dell'omogenea associata

$$y_o=\frac{c_1}{x}+c_2x^2.$$

Calcoliamo una soluzione particolare della non omogenea con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Abbiamo $\overline{y}=\frac{v_1}{x}+v_2x^2$. Il wronskiano è

$$w(x)=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & x^2\\ -\frac{1}{x^2} & 2x\end{vmatrix}=3.$$

Quindi

$$v_1=\frac{1}{3}\int\begin{vmatrix}0 & x^2\\ \frac{3x}{x+2} & 2x\end{vmatrix}dx=-\int\frac{x^3}{x+2}dx=-\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=-\frac{x^3}{3}+x^2-4x+8\ln(x+2).$$

$$v_2=\frac{1}{3}\int\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & 0\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{3x}{x+2}\end{vmatrix}dx=\int\frac{1}{x+2}dx=\ln(x+2).$$

Quindi $\overline{y}=-\frac{x^2}{3}+x-4+\frac{8}{x}\ln(x+2)+x^2\ln(x+2)$. La soluzione del problema è

$y=\frac{c_1}{x}+c_2x^2+x-4+\frac{8}{x}\ln(x+2)+x^2\ln(x+2)$. Derivando si ha

$$y'=-\frac{c_1}{x^2}+2c_2x+1-\frac{8}{x^2}\ln(x+2)+\frac{8}{x(x+2)}+2x\ln(x+2)+\frac{x^2}{x+2}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases}4=\frac{c_1}{2}+4c_2-2+8\ln 4\\ -12\ln 2=-\frac{c_1}{4}+4c_2+3+2\ln 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1+8c_2=12-32\ln 2\\ c_1-16c_2=12+64\ln 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=12\\ c_2=-4\ln 2\end{cases}.$$

La soluzione del problema è $y=\frac{12}{x}-4x^2\ln 2+x-4+\frac{8}{x}\ln(x+2)+x^2\ln(x+2)$.

ESEMPIO 8.5. Integrare l'ED $y'''-\frac{2}{x}y''+\frac{7}{x^2}y'-\frac{15}{x^3}y=\frac{1}{x^2\cos(2\ln(x))}$ nel massimo intervallo possibile contenente il punto 1.

SOLUZIONE. Alla condizione $x>0$ si aggiunge $\cos\left(2\ln\left(x\right)\right)\neq 0 \Rightarrow$ $2\ln\left(x\right)\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \forall k\in Z \Rightarrow$. In particolare, per $k=-1$ e $k=0$ si ha rispettivamente $x\neq e^{-\frac{\pi}{4}}$ e $x\neq e^{\frac{\pi}{4}}$. Poiché $e^{-\frac{\pi}{4}}<1<e^{\frac{\pi}{4}}$, allora la soluzione sarà definita nell'intervallo $J=\left(e^{-\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.

Determiniamo la soluzione generale dell'omogenea associata. Posto $y=x^{\alpha}$, abbiamo $y'=\alpha x^{\alpha-1}$, $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; e $y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}-\frac{2}{x}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{7}{x^2}\alpha x^{\alpha-1}-\frac{15}{x^3}x^{\alpha}=0,$$

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)-2\alpha(\alpha-1)+7\alpha-15=0$$

$$\alpha^3-5\alpha^2+11\alpha-15=0$$

Con Ruffini, si fattorizza il polinomio a primo membro $(\alpha-3)\left(\alpha^2-2\alpha+5\right)=0$, da cui la radice reale $\alpha_1=3$ e le radici complesse e coniugate $\alpha_{2,3}=1\pm 2i$; si ha quindi l'integrale generale dell'omogenea associata

$$y_o=c_1x^3+c_2x\cos\left(2\ln x\right)+c_3x\sin\left(2\ln x\right).$$

Calcoliamo una soluzione particolare della non omogenea con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Abbiamo $\overline{y}=v_1x^3+v_2x\cos\left(2\ln x\right)+v_3x\sin\left(2\ln x\right)$. Il wronskiano è

$$w\left(x\right)=\begin{vmatrix} x^3 & x\cos\left(2\ln x\right) & x\sin\left(2\ln x\right) \\ 3x^2 & \cos\left(2\ln x\right)-2\sin\left(2\ln x\right) & \sin\left(2\ln x\right)+2\cos\left(2\ln x\right) \\ 6x & -\frac{2}{x}\sin\left(2\ln x\right)-\frac{4}{x}\cos\left(2\ln x\right) & \frac{2}{x}\cos\left(2\ln x\right)-\frac{4}{x}\sin\left(2\ln x\right) \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{x^3}\begin{vmatrix} x^3 & x\cos\left(2\ln x\right) & x\sin\left(2\ln x\right) \\ 3x^3 & x\cos\left(2\ln x\right)-2x\sin\left(2\ln x\right) & x\sin\left(2\ln x\right)+2x\cos\left(2\ln x\right) \\ 6x^3 & -2x\sin\left(2\ln x\right)-4x\cos\left(2\ln x\right) & 2x\cos\left(2\ln x\right)-4x\sin\left(2\ln x\right) \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{x^3}\begin{vmatrix} x^3 & x\cos\left(2\ln x\right) & x\sin\left(2\ln x\right) \\ 2x^3 & -2x\sin\left(2\ln x\right) & +2x\cos\left(2\ln x\right) \\ 3x^3 & -5x\cos\left(2\ln x\right) & -5x\sin\left(2\ln x\right) \end{vmatrix}=\frac{2}{x}\begin{vmatrix} x^2 & \cos\left(2\ln x\right) & \sin\left(2\ln x\right) \\ x^2 & -\sin\left(2\ln x\right) & +\cos\left(2\ln x\right) \\ 8x^3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=16x^2\begin{vmatrix} \cos\left(2\ln x\right) & \sin\left(2\ln x\right) \\ -\sin\left(2\ln x\right) & \cos\left(2\ln x\right) \end{vmatrix}=16x^2.$$

Quindi

$$v_1=\frac{1}{16}\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2\cos\left(2\ln\left(x\right)\right)}\begin{vmatrix} x\cos\left(2\ln x\right) & x\sin\left(2\ln x\right) \\ \cos\left(2\ln x\right)-2\sin\left(2\ln x\right) & \sin\left(2\ln x\right)+2\cos\left(2\ln x\right) \end{vmatrix}dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{2}{x^3\cos\left(2\ln\left(x\right)\right)}\begin{vmatrix} \cos\left(2\ln x\right) & \sin\left(2\ln x\right) \\ -\sin\left(2\ln x\right) & \cos\left(2\ln x\right) \end{vmatrix}dx==\frac{1}{8}\int\frac{1}{x^3\cos\left(2\ln\left(x\right)\right)}dx.$$

Poiché è un integrale impossibile definisco la funzione integrale $v_1\left(x\right)=\frac{1}{8}\int_1^x\frac{1}{t^3\cos\left(2\ln\left(t\right)\right)}dt$.

$$v_2=-\frac{1}{16}\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2\cos(2\ln(x))}\begin{vmatrix}x^3 & x\sin(2\ln x)\\ 3x^2 & \sin(2\ln x)+2\cos(2\ln x)\end{vmatrix}dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x\cos(2\ln(x))}\begin{vmatrix}1 & \sin(2\ln x)\\ 1 & \cos(2\ln x)\end{vmatrix}dx=\frac{1}{8}\int\frac{\sin(2\ln(x))-\cos(2\ln(x))}{x\cos(2\ln(x))}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\sin(2\ln(x))}{x\cos(2\ln(x))}dx-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{16}\int\frac{d(\cos(2\ln(x)))}{\cos(2\ln(x))}-\frac{1}{8}\ln x=-\frac{1}{16}\ln(\cos(2\ln(x)))-\frac{1}{8}\ln x\,.$$

$$v_3=\frac{1}{16}\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2\cos(2\ln(x))}\begin{vmatrix}x^3 & x\cos(2\ln x)\\ 3x^2 & \cos(2\ln x)-2\sin(2\ln x)\end{vmatrix}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x\cos(2\ln(x))}\begin{vmatrix}1 & \cos(2\ln x)\\ 1 & -\sin(2\ln x)\end{vmatrix}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{\sin(2\ln(x))+\cos(2\ln(x))}{x\cos(2\ln(x))}dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{\sin(2\ln(x))}{x\cos(2\ln(x))}dx-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{16}\int\frac{d(\cos(2\ln(x)))}{\cos(2\ln(x))}-\frac{1}{8}\ln x=\frac{1}{16}\ln(\cos(2\ln(x)))-\frac{1}{8}\ln x\,.$$

Quindi

$$\overline{y}=v_1(x)x^3+\left(-\frac{1}{16}\ln(\cos(2\ln(x)))-\frac{1}{8}\ln x\right)x\cos(2\ln x)+\left(\frac{1}{16}\ln(\cos(2\ln(x)))-\frac{1}{8}\ln x\right)x\sin(2\ln x),$$

dove $v_1(x)=\frac{1}{8}\int_1^x\frac{1}{t^3\cos(2\ln(t))}dt$. La soluzione del problema è

$$y=c_1x^3+c_2x\cos(2\ln x)+c_3x\sin(2\ln x)+$$
$$+v_1(x)x^3+\left(-\frac{1}{16}\ln(\cos(2\ln(x)))-\frac{1}{8}\ln x\right)x\cos(2\ln x)+\left(\frac{1}{16}\ln(\cos(2\ln(x)))-\frac{1}{8}\ln x\right)x\sin(2\ln x),$$

dove $v_1(x)=\frac{1}{8}\int_1^x\frac{1}{t^3\cos(2\ln(t))}dt$.

ESEMPIO 8.6. Determinare l'integrale generale dell'ED $y''+\frac{2}{x}y'-\frac{6}{x^2}y=0$ nell'intervallo (0 , +∞).

SOLUZIONE. Posto $y = x^\alpha$, abbiamo $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{2}{x}\alpha x^{\alpha-1}-\frac{6}{x^2}x^\alpha=0,$$

cioè $\alpha^2+\alpha-6=0$, da cui le due radici $\alpha_1 = 2$ ed $\alpha_2 = -3$; si ha quindi l'integrale generale

$$y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^3}.$$

ESEMPIO 8.7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y''+\frac{5}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0\\ y(1)=6\\ y'(1)=-2.\end{cases}$

SOLUZIONE. Dalle condizioni iniziali, si deduce che il problema va risolto in $J = (0\ ,\ +\infty)$. Posto allora $y = x^{\alpha}$, abbiamo come sopra $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ e $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$; sostituendo, si trova

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \frac{5}{x}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{4}{x^2}x^{\alpha} = 0\,,$$

cioè $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$, da cui $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$; perciò questa volta l'integrale generale è

$$y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2 \log x}{x^2}.$$

Poiché inoltre risulta $y' = \dfrac{c_2 - 2c_1}{x^3} - 2\dfrac{c_2 \log x}{x^3}$, imponendo le condizioni iniziali si ha il sistema $\begin{cases} 6 = c_1 \\ -2 = c_2 - 2c_1, \end{cases}$ e da qui la soluzione $y = \dfrac{6 + 10\log x}{x^2}$.

ESEMPIO 8.8. Determinare l'integrale generale dell'ED $y''' + 2\dfrac{y'}{x} - 12\dfrac{y}{x^2} = 0$ nell'intervallo $(0\ ,\ +\infty)$.

SOLUZIONE. Posto $y = x^{\alpha}$, calcoliamo le prime tre derivate e sostituiamo, così da ottenere l'equazione $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 12 = 0$, che ammette le radici 3 e $\pm 2i$. Perciò abbiamo l'integrale generale $y = c_1 x^3 + c_2 \cos(2\log x) + c_3 \mathrm{sen}(2\log x)$.

Se l'equazione data non è omogenea, per determinare una soluzione particolare sarà necessario applicare il metodo della variazione delle costanti.

ESEMPIO 8.9. Determinare l'integrale generale dell'ED $y'' + 2\dfrac{y'}{x} - 2\dfrac{y}{x^2} = \dfrac{3}{x^2+1}$ nell'intervallo $(0\ ,\ +\infty)$.

SOLUZIONE. Procedendo come sopra, vediamo subito che l'integrale generale dell'omogenea associata è $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x^2}$. Per determinare la soluzione particolare $\bar{y}$, calcoliamo dapprima $w(x) = \begin{vmatrix} x & \dfrac{1}{x^2} \\ 1 & -\dfrac{2}{x^3} \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{x^2}$; abbiamo quindi:

$$v_1(x) = -\int \frac{\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{3}{x^2+1}}{-\dfrac{3}{x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg}\,x\,;$$

$$v_2(x) = \int \frac{x\cdot\dfrac{3}{x^2+1}}{-\dfrac{3}{x^2}}\,dx = -\int \frac{x^3\,dx}{x^2+1} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1)\,,$$

da cui $\bar{y} = x\,\mathrm{arctg}\,x + \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)\right) = x\,\mathrm{arctg}\,x + \dfrac{1}{2x^2}\log(x^2+1) - \dfrac{1}{2}$. In conclusione, l'integrale generale è $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x^2} + x\,\mathrm{arctg}\,x + \dfrac{1}{2x^2}\log(x^2+1) - \dfrac{1}{2}$.

ESEMPIO 8.10. Integrare l'ED $(x+1)^3 y''' + 3(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = (x+1)^2 \ln(x+1)$ nell'intervallo $J = (-1, +\infty)$.

SOLUZIONE. Determiniamo la soluzione generale dell'omogenea associata $(x+1)^3 y''' + 3(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$ (non è necessario ridurre in forma normale l'ED omogenea).

Posto $y = (x+1)^\alpha$ abbiamo $y' = \alpha(x+1)^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)(x+1)^{\alpha-2}$ e $y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(x+1)^{\alpha-3}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(x+1)^\alpha + 3\alpha(\alpha-1)(x+1)^\alpha - 2\alpha(x+1)^\alpha + 2(x+1)^\alpha = 0.$$

Dividendo per $(x+1)^\alpha$

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1) - 2\alpha + 2 = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-2) = 0,$$

da cui la radice reale doppia $\alpha_1 = 1$ e la radice reale semplice $\alpha_2 = -2$; si ha quindi l'integrale generale dell'omogenea associata

$$y_o = c_1(x+1) + c_2(x+1)(\ln(x+1)) + \frac{c_3}{(x+1)^2}.$$

Calcoliamo una soluzione particolare della non omogenea con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. In tal caso è necessario ridurre in forma normale l'ED: si ha

$$y''' + \frac{3}{(x+1)}y'' - \frac{2}{(x+1)^2}y' + \frac{2}{(x+1)^3}y = \frac{1}{x+1}\ln(x+1)$$

Abbiamo $\overline{y} = v_1(x+1) + v_2(x+1)(\ln(x+1)) + \frac{v_3}{(x+1)^2}$. Il wronskiano è

$$w(x) = \begin{vmatrix} x+1 & (x+1)\ln(x+1) & \frac{1}{(x+1)^2} \\ 1 & \ln(x+1)+1 & \frac{-2}{(x+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{x+1} & \frac{6}{(x+1)^4} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\begin{vmatrix} x+1 & (x+1)\ln(x+1) & 1 \\ 1 & \ln(x+1)+1 & \frac{-2}{(x+1)} \\ 0 & \frac{1}{x+1} & \frac{6}{(x+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{9}{(x+1)^3}$$

Quindi

$$v_1=\frac{1}{9}\int (x+1)^2\ln(x+1)\begin{vmatrix}(x+1)\ln(x+1) & \frac{1}{(x+1)^2}\\ \ln(x+1)+1 & \frac{-2}{(x+1)^3}\end{vmatrix}dx=\frac{1}{9}\int \ln(x+1)\begin{vmatrix}(x+1)\ln(x+1) & 1\\ \ln(x+1)+1 & \frac{-2}{(x+1)}\end{vmatrix}dx=$$

$$\frac{1}{9}\int\left(-3\ln^2(x+1)-\ln(x+1)\right)dx=-\frac{1}{3}\int\ln^2(x+1)dx-\frac{1}{9}\int\ln(x+1)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\ln^2(x+1)d(x+1)-\frac{1}{9}\int\ln(x+1)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(x+1)\ln^2(x+1)+\frac{2}{3}\int\ln(x+1)dx-\frac{1}{9}\int\ln(x+1)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(x+1)\ln^2(x+1)+\frac{5}{9}\int\ln(x+1)dx==-\frac{1}{3}(x+1)\ln^2(x+1)+\frac{5}{9}\int\ln(x+1)d(x+1)=$$

$$=-\frac{1}{3}(x+1)\ln^2(x+1)+\frac{5}{9}(x+1)\ln(x+1)-\frac{5}{9}(x+1).$$

$$v_2=-\frac{1}{9}\int (x+1)^2\ln(x+1)\begin{vmatrix}(x+1) & \frac{1}{(x+1)^2}\\ 1 & \frac{-2}{(x+1)^3}\end{vmatrix}dx=-\frac{1}{9}\int \ln(x+1)\begin{vmatrix}(x+1) & 1\\ 1 & \frac{-2}{(x+1)}\end{vmatrix}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\ln(x+1)dx=\frac{1}{3}\int\ln(x+1)d(x+1)=\frac{1}{3}(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{3}\int dx=\frac{1}{3}(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{3}(x+1).$$

$$v_3=\frac{1}{9}\int (x+1)^2\ln(x+1)\begin{vmatrix}x+1 & (x+1)\ln(x+1)\\ 1 & \ln(x+1)+1\end{vmatrix}dx=\frac{1}{9}\int (x+1)^3\ln(x+1)\begin{vmatrix}1 & \ln(x+1)\\ 1 & \ln(x+1)+1\end{vmatrix}dx=$$

$$\frac{1}{9}\int (x+1)^3\ln(x+1)dx=\frac{1}{36}\int\ln(x+1)d(x+1)^4=\frac{1}{36}(x+1)^4\ln(x+1)-\frac{1}{36}\int(x+1)^3dx=$$

$\frac{1}{36}(x+1)^4\ln(x+1)-\frac{1}{108}(x+1)^4$. Quindi

$$\bar{y}=(x+1)^2\left(-\frac{1}{3}\ln^2(x+1)+\frac{5}{9}\ln(x+1)-\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\ln^2(x+1)-\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{36}\ln(x+1)-\frac{1}{108}\right)=$$

$$=-(x+1)^2\left(\frac{13}{12}\ln(x+1)+\frac{61}{108}\right).$$

La soluzione del problema è $y=c_1(x+1)+c_2(x+1)\left(\ln(x+1)\right)+\frac{c_3}{(x+1)^2}-(x+1)^2\left(\frac{13}{12}\ln(x+1)+\frac{61}{108}\right)$.

ESEMPIO 8.11. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}3y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=x^{-\frac{1}{3}}\\ y(1)=1\\ y'(1)=1\end{cases}$ precisando l'intervallo in cui è definita la soluzione.

SOLUZIONE. La soluzione è definita nell'intervallo $J=(0,+\infty)$. Determiniamo la soluzione generale dell'omogenea associata $3y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$ (come nell'esercizio precedente non è necessario ridurre in forma normale l'ED omogenea). Posto $y=x^\alpha$, abbiamo $y'=\alpha x^{\alpha-1}$, $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; perciò, sostituendo nell'equazione data, si trova

$$3\alpha(\alpha-1)+\alpha-1=3\alpha^2-2\alpha-1=0,$$

da cui le due radici reali e distinte $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-\frac{1}{3}$; si ha quindi l'integrale generale dell'omogenea associata

$$y_o=c_1x+c_2x^{-\frac{1}{3}}.$$

Calcoliamo una soluzione particolare della non omogenea con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. In tal caso è necessario ridurre in forma normale l'ED: si ha $y''+\frac{1/3}{x}y'-\frac{1/3}{x^2}y=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Abbiamo $\overline{y}=v_1x+v_2x^{-\frac{1}{3}}$. Il wronskiano è

$$x^{-\frac{1}{3}}\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3}x^{-1}\end{vmatrix}=-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

Quindi

$$v_1=\frac{1}{4}\int x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{4}\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}}$$

$$v_2=-\frac{1}{4}\int x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}xdx=-\frac{1}{4}\int xdx=-\frac{1}{8}x^2.$$

La soluzione particolare della non omogenea è $\overline{y}=\frac{3}{8}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{3}}=\frac{1}{4}x^{\frac{5}{3}}$.

La soluzione generale dell'ED è $y=c_1x+c_2x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}x^{\frac{5}{3}}$. Derivando si ha $y'=c_1-\frac{1}{3}c_2x^{-\frac{4}{3}}+\frac{5}{12}x^{\frac{2}{3}}$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases}1=c_1+c_2+\frac{1}{4}\\ 1=c_1-\frac{1}{3}c_2+\frac{5}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4c_1+4c_2=3\\ 12c_1-4c_2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\frac{5}{4}\\ c_2=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

La soluzione del problema è $y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}x^{\frac{5}{3}}$.

schema riassuntivo

---

1) **ED risolubili mediante integrazioni dirette**: $y' = f(x)$

$$\boxed{y = \int f(x)\,dx + c} \qquad \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in D_f .$$

---

2) **ED lineari del 1 ordine in forma normale non omogenee**: $y' + a(x)y = b(x)$

$$\boxed{y = e^{-p(x)}\left(\int b(x)e^{p(x)}dx + c\right)} \text{ dove } p(x) = \int a(x)\,dx, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in I_a \cap I_b .$$

---

3) **ED lineari del 1 ordine in forma normale omogenee**: $y' + a(x)y = 0$

$$\boxed{y = ce^{-p(x)}} \text{ dove } p(x) = \int a(x)\,dx, \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in I_a .$$

---

4) **ED a variabili separabili**: $y' = P(x) \cdot Q(y)$

$$\boxed{\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx} \text{ con } Q(y) \neq 0,$$

dopo aver integrato si aggiunge la costante reale arbitraria c solo a destra e si determina il dominio.

---

5) **ED di Bernoulli**: $y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \in R - \{0,1\}$

- Si dividono i membri per y^{α} (avendo posto $y \neq 0$, se $\alpha > 0$) $\Rightarrow$ $y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$;
- Si pone $v = y^{1-\alpha}$ (da cui $y = v^{\frac{1}{1-\alpha}}$) e si derivano i membri rispetto a x $\Rightarrow$ $v' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

;

- Si sostituisce nell'ED $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{1-\alpha}v' + a(x)v = b(x)$ $\Rightarrow$ $v' + (1-\alpha)a(x)v = (1-\alpha)b(x)$;
- Si integra in quanto ED lineare del 1 ordine non omogenea

$$v = e^{-p(x)}\left((1-\alpha)\int b(x)e^{p(x)}dx + c\right) \quad \forall c \in \mathrm{R} \qquad \text{dove } p(x) = (1-\alpha)\int a(x)dx .$$

- Si risolve rispetto a y $\Rightarrow$ $\boxed{y = \left\{e^{-p(x)}\left((1-\alpha)\int b(x)e^{p(x)}dx + c\right)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}} \qquad \forall c \in \mathrm{R}$.

Fissato c in R si potrà stabilire anche il dominio di y.

---

6) **ED lineari omogenee di ordine *n* in forma normale a coefficienti costanti**:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 .$$

- Si determinano le soluzioni dell'equazione caratteristica $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$;
- ad ogni radice reale α semplice corrisponde la funzione $e^{\alpha x}$;
- ad ogni radice reale α di molteplicità $r \geq 2$ corrispondono le r funzioni $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, $x^2e^{\alpha x}$, ..., $x^{r-1}e^{\alpha x}$.
- ad ogni coppia di radici complesse coniugate $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$ di molteplicità 1, corrispondono le due funzioni $e^{\beta x}\cos\gamma x$ ed $e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x$; nel caso particolare $\beta = 0$ tali funzioni si riducono a $\cos\gamma x$ e $\operatorname{sen}\gamma x$;

- ad ogni coppia di radici complesse coniugate $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$ di molteplicità $r \geq 2$ corrispondono le $2r$ funzioni

$$e^{\beta x}\cos\gamma x, \quad xe^{\beta x}\cos\gamma x, \dots \quad , x^{r-1}e^{\beta x}\cos\gamma x,$$
$$e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x, \quad xe^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x, \dots \quad , x^{r-1}e^{\beta x}\operatorname{sen}\gamma x,$$

  funzioni che nel caso particolare $\beta = 0$ si riducono a $\cos\gamma x, x\cos\gamma x, \dots, x^{r-1}\cos\gamma x$ e $\operatorname{sen}\gamma x, x\operatorname{sen}\gamma x, \dots, x^{r-1}\operatorname{sen}\gamma x$.
- l'integrale generale è dato dalla combinazione lineare di tali funzioni.

<u>CASO particolare n = 2</u> $\quad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

- Si considera l'equazione caratteristica $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$.
- se $a_1^2 - 4a_2 > 0$, allora dette α_1 e α_2 le radici reali e distinte si ha:
$$\boxed{y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathrm{R} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathrm{R};$$
- se $a_1^2 - 4a_2 = 0$, allora detta α la radice reale doppia si ha:
$$\boxed{y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathrm{R} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathrm{R};$$
- se $a_1^2 - 4a_2 < 0$, allora dette $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ le radici complesse e coniugate si ha:
$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right)}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathrm{C} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathrm{R}.$$

---

7) **<u>ED lineari di ordine qualsiasi non omogenee</u>**

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x). \tag{5.1}$$

- calcolo l'integrale generale y_o dell'omogenea associata;

- calcolo una soluzione particolare $\overline{y}(x)$ della non omogenea (5.1);

$$\boxed{y = y_o + \overline{y} = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x) + \overline{y}(x)}, \quad \forall c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{C} \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathrm{J},$$

dove $u_1, \ldots, u_n$ è un sistema fondamentale dell'omogenea.

---

8) **<u>Criteri per determinare una soluzione particolare di una ED lineare a coeff. costanti di ordine qualsiasi non omogenee in base all'espressione del termine noto</u>** $b(x)$**.**

- <u>CASO 8.1</u> $\boxed{b(x) = ke^{\alpha x}}$

  - $\boxed{\overline{y}(x) = Ae^{\alpha x}}$ se α non è una radice dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;
  - $\boxed{\overline{y}(x) = Ax^r e^{\alpha x}}$ se α è una radice di molteplicità r dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

Costanti da determinare: A.

- CASO 8.2 $b(x)=k_m x^m+k_{m-1}x^{m-1}+\cdots+k_1 x+k_0$.
  - $\boxed{\bar{y}(x)=\left(A_m x^m+A_{m-1}x^{m-1}+\cdots+A_1 x+A_0\right)x^r}$ dove r è il minimo ordine di derivazione della y nell'ED.

  Costanti da determinare: $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0$.

- CASO 8.3 $b(x)=k_1\cos(\beta x)+k_2\sin(\beta x)$, ($k_1$, oppure k_2, può essere nullo).
  - $\boxed{\bar{y}(x)=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)}$ se $\pm i\beta$ non sono radici dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;
  - $\boxed{\bar{y}(x)=x^r\left(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right)}$ se $\pm i\beta$ sono radici di molteplicità r dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

  Costanti da determinare: A, B.

- CASO 8.4 $b(x)=\left(k_m x^m+k_{m-1}x^{m-1}+\cdots+k_1 x+k_0\right)e^{\alpha x}$
  - $\boxed{\bar{y}(x)=\left(A_m x^m+A_{m-1}x^{m-1}+\cdots+A_1 x+A_0\right)e^{\alpha x}}$ se α non è una radice dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;
  - $\boxed{\bar{y}(x)=\left(A_m x^m+A_{m-1}x^{m-1}+\cdots+A_1 x+A_0\right)x^r e^{\alpha x}}$ se α è una radice di molteplicità r dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

  Costanti da determinare: $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0$.

- CASO 8.5 $b(x)=P_m(x)\cos(\beta x)+Q_n(x)\sin(\beta x)$, $\nu=\max\{m,n\}$, (P_m, oppure Q_n, può essere nullo).
  - $\boxed{\bar{y}(x)=\left(A_\nu x^\nu+A_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+A_1 x+A_0\right)\cos(\beta x)+\left(B_\nu x^\nu+B_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+B_1 x+B_0\right)\sin(\beta x)}$ se $\pm i\beta$ non sono radici dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;
  - $\boxed{\bar{y}(x)=x^r\left[\left(A_\nu x^\nu+A_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+A_1 x+A_0\right)\cos(\beta x)+\left(B_\nu x^\nu+B_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+B_1 x+B_0\right)\sin(\beta x)\right]}$ se $\pm i\beta$ sono radici di molteplicità r dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

  Costanti da determinare $A_\nu, A_{\nu-1}, \ldots, A_1, A_0, B_\nu, B_{\nu-1}, \ldots, B_1, B_0$.

- CASO 8.6 $b(x)=e^{\alpha x}\left[k_1\cos(\beta x)+k_2\sin(\beta x)\right]$, ($k_1$, oppure k_2, può essere nullo).
  - $\boxed{\bar{y}(x)=e^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right]}$ se $\alpha\pm i\beta$ non sono radici dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;

- $\boxed{\overline{y}(x)=e^{\alpha x}x^r\left[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)\right]}$ se $\alpha \pm i\beta$ sono radici di molteplicità r dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

Costanti da determinare: A, B.

- <u>CASO 8.7</u> $\boxed{b(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos(\beta x)+Q_n(x)\sin(\beta x)\right]}$, $\nu=\max\{m,n\}$.
  - $\boxed{\overline{y}(x)=e^{\alpha x}\left[\left(A_\nu x^\nu+A_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+A_1x+A_0\right)\cos(\beta x)+\left(B_\nu x^\nu+B_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+B_1x+B_0\right)\sin(\beta x)\right]}$ se $\alpha \pm i\beta$ non sono radici dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata;
  - $\boxed{\overline{y}(x)=x^re^{\alpha x}\left[\left(A_\nu x^\nu+A_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+A_1x+A_0\right)\cos(\beta x)+\left(B_\nu x^\nu+B_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+B_1x+B_0\right)\sin(\beta x)\right]}$ se $\alpha \pm i\beta$ sono radici di molteplicità r dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata.

Costanti da determinare: $A_\nu, A_{\nu-1},\ldots,A_1,A_0,B_\nu,B_{\nu-1},\ldots,B_1,B_0$.

- <u>CASO 8.8</u> I criteri si possono utilizzare anche combinando i vari casi.

---

9) **<u>Metodo della variazione delle costanti arbitrarie</u>** (si usa per determinare la sol. particolare della (5.1) quando non è possibile applicare il metodo pratico delle tabelle.

CASO n=2

- Note le funzioni u_1, u_2 che costituiscono il sistema fondamentale dell'equazione omogenea associata.
- si calcola il determinante wronskiano $w(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$;
- si calcolano i due integrali $v_1(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ b(x) & u_2' \end{vmatrix}}{w(x)}dx$ e $v_2(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_1' & b(x) \end{vmatrix}}{w(x)}dx$, scegliendo in ciascuno dei due casi nel modo più semplice la costante arbitraria;
- si combinano linearmente le funzioni così trovate con $u_1(x)$ e $u_2(x)$, in modo da ottenere la soluzione particolare $\overline{y}$, cioè $\boxed{\overline{y}=u_1v_1+u_2v_2}$.

CASO n=3

- Note le funzioni u_1, u_2, u_3 che costituiscono il sistema fondamentale dell'equazione omogenea associata.
- si calcola il determinante wronskiano $w(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}$;
- si calcolano i tre integrali:

$$v_1(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_2' & u_3' \\ b(x) & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix}}{w(x)}dx=\int b(x)\frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2' & u_3' \end{vmatrix}}{w(x)}dx,$$

$$v_2(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 & u_3 \\ u_1' & 0 & u_3' \\ u_1'' & b(x) & u_3'' \end{vmatrix}}{w(x)}dx=-\int b(x)\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1' & u_3' \end{vmatrix}}{w(x)}dx$$ e

$$v_3(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ u_1' & u_2' & 0 \\ u_1'' & u_2'' & b(x) \end{vmatrix}}{w(x)}dx=\int b(x)\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}}{w(x)}dx,$$ scegliendo in ciascuno dei tre casi nel modo più semplice la costante arbitraria;

- si combinano linearmente le funzioni così trovate con $u_1(x)$, $u_2(x)$ e $u_2(x)$, in modo da ottenere la soluzione particolare $\bar{y}$, cioè $\boxed{\bar{y}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$.

----

10) **<u>Equazione di Eulero</u>** (omogenea in forma normale).

$$y^{(n)}+\frac{a_1}{ax+b}y^{(n-1)}+\frac{a_2}{(ax+b)^2}y^{(n-2)}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}y'+\frac{a_n}{(ax+b)^n}y=0,$$

$a,b,a_1,\ldots a_n\in \mathrm{R}$ ($a\neq 0$). Intervallo dell'integrale generale $J=\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$ oppure $J=\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$.

<u>CASO n=3</u>

$$y'''+\frac{a_1}{ax+b}y''+\frac{a_2}{(ax+b)^2}y'+\frac{a_3}{(ax+b)^3}y=0.$$

Se $x>-\frac{b}{a}$ si pone $y=(ax+b)^{\alpha}$, altrimenti, se $x<-\frac{b}{a}$, si pone $y=(-ax-b)^{\alpha}$.

Caso $x>-\frac{b}{a}$. Si pone

$y=(ax+b)^{\alpha}$, $y'=a\alpha(ax+b)^{\alpha-1}$, $y''=a^2\alpha(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-2}$, $y'''=a^3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(ax+b)^{\alpha-3}$

sostituendo nell'ED si ottiene l'equazione caratteristica

$$a^3\alpha^3+\left(a_1a^2-3a^3\right)\alpha^2+\left(2a^3-a_1a^2+a_2a\right)\alpha+a_3=0.$$

5) se ammette 3 radici reali e distinte α_1, α_2 e α_3, allora la soluzione generale è $\boxed{y=c_1(ax+b)^{\alpha_1}+c_2(ax+b)^{\alpha_2}+c_3(ax+b)^{\alpha_3}}$;

6) se ammette una radice reale semplice α_1 e una radice reale doppia α_2, allora la soluzione generale è $\boxed{y=c_1(ax+b)^{\alpha_1}+c_2(ax+b)^{\alpha_2}+c_3(ax+b)^{\alpha_2}\ln(ax+b)}$;

7) se ammette una radice reale tripla α_1, allora la soluzione generale è

$$\boxed{y = c_1 (ax+b)^{\alpha_1} + c_2 (ax+b)^{\alpha_1} \ln(ax+b) + c_3 (ax+b)^{\alpha_1} \left(\ln(ax+b)\right)^2};$$

8) se ammette una radice reale semplice α_1 e due radici complesse e coniugate semplici $\alpha_2 \pm i\beta_2$, allora la soluzione generale

$$\boxed{y = c_1 (ax+b)^{\alpha_1} + (ax+b)^{\alpha_2} \left(c_2 \cos\left(\beta_2 \ln(ax+b)\right) + c_3 \sin\left(\beta_2 \ln(ax+b)\right)\right)}.$$

<u>CASO n=2</u>

$$y'' + \frac{a_1}{(ax+b)} y' + \frac{a_2}{(ax+b)^2} y = 0 .$$

Se $x > -\frac{b}{a}$ si pone $y = (ax+b)^\alpha$, altrimenti, se $x < -\frac{b}{a}$, si pone $y = (-ax-b)^\alpha$.

Caso $x > -\frac{b}{a}$: si pone $y = (ax+b)^\alpha$,

$$y' = a\alpha (ax+b)^{\alpha-1},$$
$$y'' = a^2\alpha(\alpha-1)(ax+b)^{\alpha-2},$$

sostituendo nell'ED si ottiene l'equazione caratteristica

$$a^2\alpha^2 + \left(a_1 a - a^2\right)\alpha + a_2 = 0 .$$

9) se ammette 2 radici reali e distinte α_1, α_2, allora la soluzione generale è

$$\boxed{y = c_1 (ax+b)^{\alpha_1} + c_2 (ax+b)^{\alpha_2}};$$

10) se ammette una radice reale doppia α_1, allora la soluzione generale è

$$\boxed{y = c_1 (ax+b)^{\alpha_1} + c_2 (ax+b)^{\alpha_1} \ln(ax+b)};$$

11) se ammette due radici complesse e coniugate semplici $\alpha_1 \pm i\beta_1$, allora la soluzione generale

$$\boxed{y = (ax+b)^{\alpha_1} \left(c_1 \cos\left(\beta_1 \ln(ax+b)\right) + c_2 \sin\left(\beta_1 \ln(ax+b)\right)\right)}.$$

<u>Osservazione</u>:
Se l'ED si presenta in forma non normale

$$a_0 (ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 (ax+b)^{n-1} y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = b(x),$$

allora per determinare l'integrale generale della omogenea associata non è necessario dividere I e II membro per $a_0 (ax+b)^n$; invece per determinare l'integrale particolare della non omogenea, con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie o con il metodo diretto delle tabelle, è necessario dividere I e II membro per $a_0 (ax+b)^n$ e ridurla quindi in forma normale

$$y^{(n)} + \frac{a_1 / a_0}{(ax+b)} y^{(n-1)} + \frac{a_2 / a_0}{(ax+b)^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{a_{n-1} / a_0}{(ax+b)^{n-1}} y' + \frac{a_n / a_0}{(ax+b)^n} y = \frac{b(x)}{a_0 (ax+b)^n} .$$