Venerdì 16.11. 2018. Esercitazioni di Analisi Matematica I.

Prof. Fabrizio Pascucci

1. Dimostriamo per induzione che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n.$$

A) Il limite è verificato per n = 1: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x}=1$

B) Supponiamo che per $n = k$ risulti $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$. Consideriamo $n = k + 1$, ovvero

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k+1}-1}{x}$. Possiamo scrivere: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+x)^k-1}{x}$. Quindi

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1+x(1+x)^k}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}+\lim_{x\to 0}(1+x)^k=k+1$. Q.E.D.

2. Applicazioni del precedente limite:

1.1. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^6-1}{\pi x}=\frac{6}{\pi}$.

1.2. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-1}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-1}{3x}=\frac{4}{3}$.

1.3. $\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^5-1}{5x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\frac{(1-2x)^5-1}{-2x}=-\frac{2}{5}\cdot 5=-2$.

1.4. Il limite 1. si può estendere al caso di esponenti non naturali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{5}.$$

2. Calcolare mediante la continuità I seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to 9}\frac{2x-\sqrt{x}}{x^2-x+3}$. b) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x+\cos x}$. C) $\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x}{2^{2x}-2^x-2}$.

3. Calcolo di limiti mediante le formule di prostaferesi:

3.1. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

3.2 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\cos 10x-\cos 4x}$.

3.3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(Soluzione)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\sin\frac{\pi}{2}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos\frac{2x+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{2x-\frac{\pi}{2}}{2}}{2\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\times\frac{2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\right]=$$

$$=0\times 1\times 2=0.$$

4. Razionalizzazione del numeratore.

4.1. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1}.$

4.2. Determinate i valori dei parametri *a* e *b* in modo che risulti:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-ax-b\right)=-\frac{3}{4}.$$

4.3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$.

Soluzioni.

4.1. Il trinomio sotto radice è sempre positivo, dunque ha senso il limite a meno infinito.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x+1}{(x-1)\sqrt{2x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)|x|\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}x}{-x}=-\sqrt{2}\,.$$

4.2. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-ax-b\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-a^2x^2-b^2-2abx}{\sqrt{4x^2+x}+ax+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-a^2\right)x^2+(1-2ab)x-b^2}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x\left(a+\frac{b}{x}\right)}=$$

$\{4-a^2=0\}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2ab)x-b^2}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x\left(a+\frac{b}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2ab}{2+a}=-\frac{3}{4}.$$

$2+a=4,\quad a=2$

$1-4b=-3,\ \ b=1$

4.3. Il limite richiesto è

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\left\{utilizziamo\ \ il\ \ prodotto\ \ notevole\ \ (a-b)\ (a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4\left(x+1\right)^2}+x^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

4.4. Dimostrate che

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x))}{\tan x}$ = 1.