ESERCITAZIONI DI ANALISI 1
FOGLIO 1
FOGLIO 2
FOGLIO 3
FOGLIO 4
FOGLIO 5
FOGLIO 6
FOGLIO 7
SVOLTI

Marco Pezzulla

21 gennaio 2015

FOGLIO 1

1. Determinare il dominio e il segno della funzione

$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{x^2 - 1} - x + 1\right) - \pi/3$$

2. Sia $f(x)$ una funzione tale che $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Studiare, al variare del parametro c, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)(c + \sin(x))$$

3. Dimostrare che $\forall q \neq 1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

4. Dimostrare, mediante la definizione di limite, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1 - x} = -\infty$$

5. Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$$

6. Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq 3$, vale:

$$n^2 > 2n + 1$$

SVOLGIMENTO

1. Per studiare il dominio della funzione $f(x)$ dobbiamo imporre che l'argomento della radice quadrata non sia negativo e l'argomento della funzione arccos sia compreso tra -1 e 1.

   Dunque dobbiamo intersecare l'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 - 1 \geq 0$ con quello delle soluzioni delle due disequazioni $-1 \leq \sqrt{x^2-1} - x + 1 \leq 1$ (è equivalente studiare $|\sqrt{x^2-1} - x + 1| \leq 1$).

   In particolare $x^2 - 1 \geq 0$ ha come insieme delle soluzioni l'insieme

   $$S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

   . Mentre per trovare le soluzioni di

   $$-1 \leq \sqrt{x^2-1} - x + 1 \leq 1$$

   bisogna studiare due equazioni irrazionali e intersecare le loro soluzioni. Le due disequazioni sono

   $$\sqrt{x^2-1} \leq x$$

   e

   $$\sqrt{x^2-1} \geq x - 2$$

   La prima disequazione è equivalente al seguente sistema di disequazioni:

   $$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq x^2 \end{cases}$$

   che ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

   $$S_1 \cap [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [1, +\infty)$$

   Allo stesso modo la seconda disequazione ha come soluzioni l'unione delle soluzioni dei seguenti due sistemi di disequzioni:

   $$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

il primo ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap [2, +\infty) \cap [5/4, +\infty) = [2, +\infty)$$

Il secondo ha come insieme delle soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap (-\infty, 2) = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$$

L'unione dell'insieme delle soluzioni dei sue sistemi è quindi S_1.

Intersecando ora gli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni troviamo che il dominio della funzione $f(x)$ è la semiretta $[1, \infty)$.

Studiamo ora il segno della funzione $f(x)$. Studiamo quindi prima la disequazione $f(x) > 0$, poi l'equazione $f(x) = 0$ e, andando per esclusione, troveremo anche le x per cui $f(x) < 0$.

$$f(x) > 0 \Rightarrow \arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) - \pi/3 > 0$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) > \pi/3$$

ed essendo $1/2 = \cos(\pi/3)$ si ha

$$\sqrt{x^2-1} - x + 1 < 1/2$$

(si inverte il segno della disequazione perché la funzione $\arccos(x)$ è strettamente decrescente)

Dunque dobbiamo risolvere la seguente disequazione irrazionale

$$2\sqrt{x^2-1} < 2x - 1$$

che è equivalente al seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 4x^2 - 4 < 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni l'intersezione

$$S_1 \cap (1/2, +\infty) \cap (-\infty, 5/4) = [1, 5/4)$$

Quindi la funzione $f(x)$ è positiva per $x \in [1, 5/4)$. Studiamo ora dove la funzione si annulla, cioè dove

$$\arccos\left(\sqrt{x^2-1} - x + 1\right) - \pi/3 = 0$$

con lo stesso ragionamento fatto per la disequazione, questa equivale a

$$\sqrt{x^2-1}-x+1=1/2$$

che è verificata per $x=5/4$.

Di conseguenza possiamo concludere che

$$\begin{cases} f(x)>0 \text{ se} & x\in[1,5/4) \\ f(x)=0 \text{ se} & x=5/4 \\ f(x)<0 \text{ se} & x\in(5/4,+\infty) \end{cases}$$

2. Innanzitutto notiamo che, essendo $-1 \le \sin(x) \le 1$, abbiamo che $c-1 \le c+\sin(x) \le c+1$, dunque

$$f(x)(c-1) \le f(x)(c+\sin(x)) \le f(x)(c+1), \forall x \in (\delta,+\infty)$$

dove con δ abbiamo indicato un numero sufficientemente grande tale che $f(x) > 0, \forall x > \delta$ (sappiamo che esiste perché, per ipotesi, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$). Ora si prospettano 5 casi per la costante c.

1 caso. Se $c-1>0$, cioè $c>1$, $f(x)(c-1) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Quindi, dal Teorema del confronto,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)(c+\sin(x)) = +\infty$$

2 caso. Se $c+1<0$, cioè $c<-1$, $f(x)(c+1) \to -\infty$ per $x \to +\infty$. Quindi, dal Teorema del confronto,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)(c+\sin(x)) = -\infty$$

3 caso. Se $-1<c<1$ il Teorema del Confronto non è applicabile.Però possiamo notare che

$$\forall\delta>0, \exists x', x'' \in (\delta,+\infty) : \sin(x') = -1 \text{ e } \sin(x'') = +1$$

cioè tali che

$$f(x')(c+\sin(x')) = f(x')(c-1)$$
$$f(x'')(c+\sin(x'')) = f(x'')(c+1)$$

Quindi $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)(c+\sin(x)$.

4 caso. $c=-1$; in questo caso possiamo scrivere direttamente

$$-2f(x) \le f(x)(-1+\sin(x)) \le 0, \forall x \in (\delta,+\infty)$$

Anche in questo caso non si può applicare il Teorema del Confronto ma possiamo dire che

$$\forall \delta > 0, \exists x', x'' \in (\delta, +\infty) : \sin(x') = -1 \text{ e } \sin(x'') = 1$$

cioè tali che

$$f(x')(-1 + \sin(x')) = -2f(x')$$
$$f(x'')(-1 + \sin(x'')) = 0$$

e quindi anche in questo caso possiamo concludere che $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)(c + \sin(x)$.

5 caso. $c = 1$; in questo caso possiamo scrivere direttamente

$$0 \leq f(x)(1 + \sin(x)) \leq 2f(x), \forall x \in (\delta, +\infty)$$

Anche in questo caso non si può applicare il Teorema del Confronto ma possiamo dire che $\forall \delta > 0, \exists x', x'' \in (\delta, +\infty) : \sin(x') = -1$ e $\sin(x'') = 1$, cioè tali che

$$f(x')(1 + \sin(x')) = 0$$

$$f(x'')(1 + \sin(x'')) = 2f(x)$$

e quindi anche in questo caso possiamo concludere che $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)(c+ \sin(x)$.

3. L'idea per dimostrare questo esercizio di carattere teorico è utilizzare il *principio di induzione.*

   Innanzitutto verifichiamo il passo iniziale del principio: $n = 0$.

   In effetti

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$$

   e

$$\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = 1$$

   Di conseguenza, per $n = 0$, l'uguaglianza è soddisfatta.

   Dobbiamo ora dimostrare che se per un generico n è verificata la seguente uguaglianza (**ipotesi induttiva**)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

allora
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$
cioè l'uguaglianza vale anche per il passo $n+1$.

A tal proposito possiamo scrivere

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} =$$

per l'ipotesi induttiva

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} =$$
$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$
che è ciò che volevamo dimostrare. Dunque per il principio di induzione abbiamo dimostrato che $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Osserviamo che, naturalmente, il valore $q = 1$ è da escludere perché il denominatore del membro di destra dell'uguaglianza è $q - 1$.

4. A partire dalla definizione dobbiamo dimostrare che

$$\forall k > 0, \exists \delta_k > 0 : \forall x > \delta_k, \frac{x^3}{1-x} < -k$$

Nei casi più semplici la strategia è quella di cercare di risolvere la disequazione $\frac{x^3}{1-x} < -k$ e controllare se nell'insieme delle soluzioni c'è un sottoinsieme del tipo $\{x > \delta_k\}$. Tuttavia ci sono casi in cui le disequazioni con cui abbiamo a che fare non sono di semplice soluzione. E questo esercizio ne è un esempio.

Notiamo innanzitutto che, volendo studiare il comportamento della frazione per x che tende a $+\infty$, possiamo assumere il denominatore negativo, in quanto stiamo trattando valori di x molto maggiori di 1.

Dunque possiamo riportare la nostra analisi allo studio della disequazione $x^3 - kx + k > 0$ che è equivalente a $\frac{x^3}{1-x} < -k$ sotto l'assunzione $1 - x < 0$ (è stato portato il $-k$ a sinistra ed è stato fatto il minimo comune multiplo).

Tuttavia anche $x^3 - kx + k > 0$ è una disequazione che non è immediato risolvere. Conviene considerare una funzione ausiliaria $g(x) = x^3 - kx$, che minora la funzione $x^3 - kx + k$ e si ottiene da essa eliminando la costante $k > 0$. Dunque

$$x^3 - kx + k > x^3 - kx > 0$$

Ora $x^3 - kx > 0$ è di facile soluzione. Infatti si riduce a

$$x(x^2 - k) > 0$$

e, poiché stiamo trattando valori di x grandi e positivi, possiamo direttamente studiare

$$(x^2 - k) > 0$$

che ha, come insieme di soluzioni positive $\mathcal{S}' = (\sqrt{k}, +\infty)$.

Ora è importante notare che se abbiamo una relazione d'ordine del tipo $f(x) > g(x) > 0$ e indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x) > 0$ e con $\mathcal{S}'$ l'insieme delle soluzioni della disequazione $g(x) > 0$, allora $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$. Infatti se $\bar{x}$ è un punto fissato tale che $\bar{x} \in \mathcal{S}'$ allora, per definizione di $\mathcal{S}'$, $g(\bar{x}) > 0$; ma allora $f(\bar{x}) > 0$ (perché $f(x) > g(x)$), dunque $\bar{x} \in \mathcal{S}$; quindi $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$.

Dunque, tornando all'esercizio, $\mathcal{S}' = (\sqrt{k}, +\infty) \subseteq \mathcal{S}$ e di conseguenza possiamo prendere $\delta_k = \sqrt{k}$.

5. Dobbiamo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$; dunque, per definizione, dobbiamo dimostrare che

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n_0, b_n < -M$$

ma d'altronde sappiamo, per ipotesi, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Dunque

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n_0, a_n < -M$$

E, per ipotesi, abbiamo che $a_n \geq b_n, \forall n$, quindi

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n_0, b_n \leq a_n < -M$$

Segue che

$$\forall M > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0, b_n < -M$$

che è quello che volevamo dimostrare.

6. Dimostriamo per induzione. Verifichiamo innanzitutto il passo iniziale: $n = 3$.

$$3^2 > 6 + 1$$

Supponiamo che la relazione valga per n con $n \geq 3$ (ipotesi induttiva) e verifichiamo che vale per $n + 1$.

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 >$$

per l'ipotesi induttiva

$$> 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 2 \geq 2(n + 1) + 1$$

per $n \geq 1$. Sembrerebbe, quindi, che la relazione vale $\forall n \geq 1$, tuttavia l'ipotesi induttiva vale $\forall n \geq 3$, di conseguenza non possiamo includere i valori $n = 1, n = 2$.

Dunque abbiamo dimostrato che la relazione $n^2 > 2n + 1$ vale $\forall n \geq 3$.

FOGLIO 2

1. Determinare (se esistono) l'estremo inferiore, superiore, il massimo e il minimo assoluti della successione
$$a_n = \frac{3+4n}{2^n}$$

2. Sia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-2x-3|+|\ln(-x)|}{|x+1|} & \text{se } x \in (-3,0) \setminus \{-1\} \\ \alpha & \text{se } x = -1 \end{cases}$$
Determinare il valore da assegnare al parametro reale α affinché f risulti continua in $(-3,0)$. Per tale valore di α determinare l'insieme di derivabilità.

3. Stabilire l'invertibilità delle funzioni $f(x) = \cos(3x)$ e $g(x) = x + f(x)$ nell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. In caso affermativo determinare l'espressione esplicita della funzione inversa di f, l'insieme di derivabilità di g^{-1} e calcolare, se esiste, $\frac{dg^{-1}}{dy}(\pi/2)$.

4. Sia f una funzione continua in x_0 e sia $f(x_0) > 0$. Dimostrare che esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) > 0$ in tale intorno.

5. Dimostrare o confutare (giustificando la risposta) la seguente affermazione: sia $c = \sup A$ con A illimitato inferiormente. Allora $\forall \varepsilon > 0$ si ha $c - \varepsilon \in A$.

SVOLGIMENTO

1. Possiamo notare innanzitutto che $a_n > 0, \forall n$ e che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Da questo possiamo sicuramente concludere che $\nexists \min_n a_n$ e che

$$\inf_n a_n = 0$$

Per trovare l'eventuale massimo una strategia spesso valida è quella di costruire una funzione $f(x)$ associata alla successione a_n, ottenuta da quest'ultima semplicemente sostituendo la variabile naturale n con una variabile reale x. In questo caso, quindi, la funzione associata alla successione a_n sarebbe

$$f(x) = \frac{3+4x}{2^x}$$

Una volta fatto questo avremmo tutti gli strumenti necessari (derivata prima e seconda) per studiare il massimo della funzione $f(x)$; il massimo della successione a_n spesso (dipende dall'andamento globale della funzione associata) coincide con il più grande tra i due valori assunti dalla successione nel naturale precedente e in quello seguente il punto di massimo (in generale non naturale) della funzione $f(x)$; questo perché $f(n) = a_n, \forall n$.
Nel caso specifico del nostro esercizio non serve questa costruzione. Per studiare la monotonia della successione possiamo studiare la disequazione

$$a_{n+1} > a_n$$

e trovare per quali n è soddisfatta. Studiamo quindi

$$\frac{3+4(n+1)}{2^{n+1}} > \frac{3+4n}{2^n}$$

$$\frac{(3+4n+4)}{2} > 3+4n$$

$$\frac{7}{2} + 2n > 3+4n$$

$$1/2 > 2n$$

$$n < 1/4$$

Da questa soluzione notiamo che se la successione parte da $n = 0$ allora la successione è crescente tra 0 e 1 e poi decresce; mentre se la successione parte da $n = 1$ la successione è monotòna decrescente. In entrambi i casi il massimo si ha per $n = 1$, dove la successione vale $a_1 = 7/2$.

Quindi possiamo concludere che la successione non ha minimo, il suo estremo inferiore è 0, mentre l'estremo superiore e il massimo coincidono e sono uguali a 7/2.

2. Osserviamo dallo studio del segno delle funzioni all'interno dei tre moduli che

$$|x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{se } x \in (-1, 0) \\ (x-3)(x+1) & \text{se } x \in (-3, -1) \end{cases}$$

$$|\ln(-x)| = \begin{cases} -\ln(-x) & \text{se } x \in (-1, 0) \\ \ln(-x) & \text{se } x \in (-3, -1) \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in (-1, 0) \\ -x-1 & \text{se } x \in (-3, -1) \end{cases}$$

Quindi se $x \in (-1, 0)$ allora per esplicitare il modulo dobbiamo cambiare segno al numeratore e lasciare invariato quello del denominatore, mentre se $x \in (-3, -1)$ allora dobbiamo cambiare segno al denominatore e lasciare invariato quello del numeratore. In entrambi i casi, quindi, l'espressione della funzione è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3+\ln(-x)}{-x-1} & \text{se } x \in (-3, 0) \setminus \{-1\} \\ \alpha & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Affinché la funzione sia continua nel punto -1, dobbiamo imporre

$$\alpha = \lim_{x \to -1} f(x)$$

Applicando il Teorema di De l'Hospital possiamo dire che

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x - 2 + 1/x}{-1} = 5$$

Concludiamo che per $\alpha = 5$ la funzione $f(x)$ risulta essere continua anche nel punto -1. Sia quindi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3+\ln(-x)}{-x-1} & \text{se } x \in (-3, 0) \setminus \{-1\} \\ 5 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

L'unico punto in cui potrebbe non esistere la derivata nell'intervallo $(-3, 0)$ è il punto -1. Ma calcolando prima

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 2 - 1/x + \ln(-x)}{(x+1)^2}$$

e applicando due volte il Teorema di De l'Hospital scopriamo che

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{-2x - 2 + 1/x^2 + 1/x}{2(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-2 - 2/x^3 - 1/x^2}{2} = -1/2$$

Quindi per $\alpha = 5$ la funzione $f(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $(-3, 0)$. In particolare $f'(-1) = -1/2$

3. La funzione $f(x)$ è la composizione della funzione $h(x) = 3x$ e della funzione $k(t) = \cos(t)$. Notiamo inoltre che se x varia in $[\pi/3, 2\pi/3]$ allora t varia in $[\pi, 2\pi]$. Sia la funzione $h(x)$ che la funzione $k(t)$ sono monotòne crescenti negli intervalli appena specificati; quindi anche $f(x)$ lo è, essendo $f(x) = k(h(x))$. Per trovare $f^{-1}(y)$ dobbiamo trovare sia k^{-1} che h^{-1}. Infatti $f^{-1}(y) = h^{-1}(k^{-1}(y))$. Innanzitutto dobbiamo invertire $k(t) = \cos(t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$. La funzione cercata non è $t = \arccos(y)$, perché questa è l'inversa di $\cos(t)$ con $t \in [0, \pi]$. La nostra funzione si ottiene o riflettendo la funzione $\arccos(y)$ rispetto all'asse t e traslarla di π verso l'alto, o riflettendo la funzione $\arccos(y)$ rispetto all'asse y e traslarla di 2π verso l'alto. La funzione inversa di $h(x)$ è facile da trovare ed è $x = h^{-1}(y) = y/3$. Possiamo concludere che
$$x = f^{-1}(y) = \frac{-\arccos(y) + 2\pi}{3} = \frac{\arccos(-y) + \pi}{3}$$

   Passiamo ora alla funzione $g(x)$. E' somma di due funzioni x e $f(x)$, entrambe monotòne crescenti nell'intervallo $[\pi/3, 2\pi/3]$, dunque anch'essa sarà una funzione monotòna crescente nel suddetto intervallo, e quindi è invertibile. Il dominio della funzione inversa è il codominio di $g(x)$, che è
$$C_g = [g(\pi/3), g(2\pi/3)]$$
   Poichè $g'(x) = 1 - 3\sin(3x) \neq 0$ in I, allora per il Teorema di Derivazione della funzione inversa

$$D_{(g^{-1})'} = D_{g^{-1}}$$

e

$$\frac{dg^{-1}}{dy}(\bar{y}) = \frac{1}{1 - 3\sin(3\bar{x})}$$

dove $\bar{x}$ è il punto tale che $\bar{x} = g^{-1}(y)$, che è il punto $\bar{x}$ tale che $g(\bar{x}) = \bar{y}$. Nel nostro caso $\bar{y} = \pi/2$, quindi dobbiamo trovare $\bar{x}$ che soddisfa l'equazione

$$\pi/2 = x + \cos(3x)$$

La soluzione di questa equazione si trova con l'intuizione, ed in questo caso è $\bar{x} = \pi/2$.

Dunque

$$\frac{dg^{-1}}{dy}(\pi/2) = \frac{1}{1 - 3\sin(3\pi/2)} = 1/4$$

4. Per ipotesi, dalla definizione di continuità in un punto, abbiamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \mid \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon), f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

e dobbiamo dimostrare che

$$\exists \sigma > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma), f(x) > 0$$

ma scegliendo, ad esempio, $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, si ha, dall'ipotesi, che

$$\exists \delta_{\frac{f(x_0)}{2}} \mid x \in (x_0 - \delta_{\frac{f(x_0)}{2}}, x_0 + \delta_{\frac{f(x_0)}{2}}), \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$$

In particolare, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Quindi scegliendo $\sigma = \delta_{\frac{f(x_0)}{2}}$ si ha la tesi. Abbiamo quindi dimostrato che $\forall x_0$ che soddisfa le ipotesi del testo, nell'intorno $(x_0 - \delta_{\frac{f(x_0)}{2}}, x_0 + \delta_{\frac{f(x_0)}{2}})$ la funzione è positiva, dunque l'intorno cercato è proprio questo.

5. L'affermazione è FALSA. Un controesempio è l'insieme

$$A = (-\infty, 0) \cup \{1\}$$

Infatti il $\sup A = 1$ ed $\exists \varepsilon > 0 \mid 1 - \varepsilon \notin A$, ad esempio $\varepsilon = 1/2$.

FOGLIO 3

1. Provare la seguente disuguaglianza:

$$\ln(1+\cos(x)) + \frac{x^2}{4} \leq \ln 2, -\pi < x < \pi$$

2. Dire per quali valori di $a > 0$ l'equazione $x = \log_a x$ ammette soluzioni e in tal caso stabilirne il numero. (suggerimento: distinguere i casi corrispondenti ad $a > 1$ e $a < 1$)

3. Studiare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \arctan\left(\sqrt{|x^2+3x|}\right)$. Classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

4. Verificare, mediante la definizione di estremo inferiore, se risulta

$$\inf_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

5. Dimostrare che per ogni intero non negativo n vale l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

SVOLGIMENTO

1. Per provare la disuguaglianza, possiamo definire la funzione

$$f(x) = \ln(1+\cos(x)) + \frac{x^2}{4} - \ln 2$$

Se riusciamo a verificare che $f(x) \leq 0$ per $x \in (-\pi, \pi)$ abbiamo dimostrato automaticamente la disuguaglianza.

In effetti

$$f'(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}(-\sin(x)) + \frac{x}{2}$$

ed

$$f''(x) = \frac{-1+\cos(x)}{2(1+\cos(x))}$$

Allora $f''(x) \leq 0$ per $x \in (-\pi, \pi)$, perché $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ e si annulla solo per $x = 0$. Dunque $f'(x)$ è una funzione decrescente per $x \in (-\pi, \pi)$. Notando che $f'(0) = 0$ possiamo dire che 0 è punto massimo assoluto di f in $(-\pi, \pi)$. $f(0) = 0$, quindi $f(x) \leq 0$ per $x \in (-\pi, \pi)$ e la disuguaglianza è provata.

2. Innanzitutto poniamo $f(x) = x - \log_a(x)$ e distinguiamo, come da suggerimento, i casi $a < 1$ e $a > 1$. L'equazione ammetterà tante soluzioni quanti sono gli zeri della funzione $f(x)$.

Supponiamo, inizialmente, che $a < 1$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x \ln a} = \frac{x \ln a - 1}{x \ln a}$. Allora $f'(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, dunque la funzione è crescente in questo intervallo e siccome risulta

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f(1) = 1$$

E' chiaro, per il Teorema dell'esistenza degli zeri, essendo f una funzione continua, che $\exists!$ zero della funzione $f(x)$, soluzione dell'equazione data.

Sia ora $a > 1$. Dallo studio della derivata prima si evince che $x = \frac{1}{\ln a}$ è il punto di minimo assoluto della funzione f in $\mathbb{R}^+$. Ora

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

Se $f(\frac{1}{\ln a}) > 0$ allora $\nexists$ zeri per f; se $f(\frac{1}{\ln a}) = 0$ allora $\exists!$ zero della funzione f; se $f(\frac{1}{\ln a}) < 0$ $\exists$ due zeri per la funzione f.

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln a} - \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) > 0$$

$$\frac{1}{\ln a} > \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

$$\frac{1}{\ln a} > \frac{\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}$$

$$1 > \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)$$

$$\frac{1}{\ln a} < e$$

$$a > e^{1/e}$$

Quindi, se $a > e^{1/e}$ allora non esistono zeri per la funzione f e di conseguenza nemmeno soluzioni per l'equazione data. Se, invece, $a = e^{1/e}$ esiste un solo zero per la funzione f e, conseguentemente, una sola soluzione per l'equazione data. Infine, se $a < e^{1/e}$ esistono due zeri per la funzione f e di conseguenza due soluzioni per l'equazione data.

3. Dallo studio del modulo possiamo dire che

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\sqrt{x^2+3x} & \text{se } x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \\ \arctan(\sqrt{-x^2-3x} & \text{se } x \in (-3, 0) \end{cases}$$

Quindi f sicuramente è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ e continua in tutto $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue. $\forall x \neq -3, 0$ possiamo scrivere

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{2(1+x^2+3x)\sqrt{x^2+3x}} & \text{se } x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty) \\ \frac{2x+3}{2(x^2+3x-1)\sqrt{-x^2-3x}} & \text{se } x \in (-3, 0) \end{cases}$$

Nei punti $-3, 1$ dobbiamo studiare la derivabilità. Notiamo che

$$\lim_{x \to -3^-} f'(x) = -\infty; \lim_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty; \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

Dunque possiamo concludere la funzione non è derivabile nei punti $-3, 0$, quindi $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ e i due punti sono due punti cuspidali, come si evince dallo studio dei limiti appena fatto.

4. Dalla definizione di estremo inferiore dobbiamo verificare che 0 è il massimo dei minoranti dell'insieme
$$A = \{y : \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = (1/2)^{1/x}\}$$
cioè dobbiamo verificare che
   (a) 0 è un minorante dell'insieme A
   (b) se $z > 0$ allora z non è un minorante dell'insieme A, cioè $\exists h \in A : h < z$

   Il punto 1. è facilmente verificato notando che tutti i punti che si esprimono come $(1/2)^{1/x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sono strettamente positivi, dunque 0 è un minorante dell'insieme A.

   Per verificare il punto 2. dobbiamo verificare che $\forall z > 0, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : z > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. Il numero cercato è un qualsiasi numero reale non nullo tale che $x < \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(z)}$, che effettivamente appartiene all'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Dimostriamo per induzione. Verifichiamo quindi che l'uguaglianza è vera per $n = 0$.
$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k} = 1$$
e
$$2 - \frac{1}{2^0} = 1$$
Dunque l'uguaglianza è verificata.

   Supponiamo ora l'ipotesi induttiva, cioè che l'uguaglianza sia vera per n e dimostriamo che allora è vera per $n + 1$.
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} =$$
che per ipotesi induttiva
$$= 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n}(1 - 1/2) =$$
$$2 - \frac{1}{2^n}(1/2) = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$
Dunque, per induzione, possiamo concludere che è vera l'uguaglianza
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

FOGLIO 4

1. Provare la seguente disuguaglianza:
$$x^x \geq x, x > 0$$

2. Determinare l'espressione esplicita e l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \max(\arctan(x), x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Stabilire l'invertibilità della funzione $g(x) = x + f(x)$ e determinare l'insieme di derivabilità della funzione inversa g^{-1}. Calcolare
$$\frac{dg^{-1}}{dy}(-1 - \pi/4)$$

3. Dimostrare che $\forall x \in [0, 1)$ vale l'identità:
$$\arccos(x) = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

4. Dimostrare o confutare, mediante la definizione di funzione convergente che
$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

5. Dimostrare o confutare la seguente affermazione: sia f derivabile nel suo dominio e sia $f'(x) < 0, \forall x \in D_f$, allora f è strettamente decrescente in D_f.

SVOLGIMENTO

1. Come nel primo esercizio del foglio 3 poniamo $f(x) = x^x - x$. Osserviamo prima di tutto che $x^x = e^{x \ln x}$. Dimostrare la disuguaglianza $\forall x > 0$ equivale a dimostrare che la funzione $f(x)$ è non negativa. Allora scriviamo la derivata prima

$$f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) - 1$$

il segno della derivata prima è difficile da studiare. Cerchiamo di ricavare informazioni dalla derivata seconda.

$$f''(x) = e^{x \ln x} \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

che è positiva in $\mathbb{R}^+$. Dunque la derivata prima è crescente in $\mathbb{R}^+$. Inoltre, osservando che $f'(1) = 0$, allora 1 è il minimo assoluto di f per $x > 0$.

Ma $f(1) = 0$ dunque

$$f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^+$$
$$x^x - x \geq 0, x \in \mathbb{R}^+$$
$$x^x \geq x, x \in \mathbb{R}^+$$

che è quello che volevamo dimostrare.

2. Per ogni punto x, la funzione $\max(x, \arctan(x))$ associa x, se $x \geq \arctan(x)$, mentre associa $\arctan(x)$ se $x < \arctan(x)$. Possiamo definire la funzione $h(x) = x - \arctan(x)$. Notiamo che $h(0) = 0$, inoltre

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$$

Dunque $h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi la funzione $h(x)$ è crescente per $x \in \mathbb{R}$. Quindi, in particolare, $h(x) > 0, x \in \mathbb{R}^+$ e $h(x) < 0, x \in \mathbb{R}^-$. Quindi $x > \arctan(x), x \in \mathbb{R}^+$ e $x < \arctan(x), x \in \mathbb{R}^-$. Dunque

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Innanzitutto notiamo che la funzione e' continua in 0 e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; inoltre essa risulta derivabile anche in 0 poiché f è continua e

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$$

Dunque $D_{f'} = \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Passiamo ora alla funzione $g(x) = x + f(x)$. Dalla scrittura di prima possiamo scrivere

$$g(x) = f(x) + x = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(x) + x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La bisettrice del primo quadrante è monotòna crescente; dalla forma di prima ci accorgiamo anche che $f(x)$ è una funzione crescente, di conseguenza anche $g(x)$, essendo somma di funzioni crescenti, è una funzione crescente. Dunque è invertibile nel suo dominio. Il dominio della funzione inversa è il codominio di $g(x)$. Dunque $D_{g^{-1}} = C_g = \mathbb{R}$. D'altronde

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = 2$$

e

$$g'(x) = f'(x) + 1 = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x^2} + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $D_{(g^{-1})'} = D_{g^{-1}}$ e

$$\frac{dg^{-1}}{dy}(-1 - \pi/4) = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{1 + 1/2} = 2/3$$

infatti per il Teorema di derivazione della funzione inversa l'equazione

$$-1 - \frac{\pi}{4} = x + f(x)$$

ha come unica soluzione $x = -1$.

3. Per dimostrare che $\forall x \in [0, 1)$

$$\arccos x = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

ci possiamo servire della funzione ausiliaria $g(x) := \arccos x - 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$. Dimostrare l'uguaglianza equivale a dimostrare che la funzione g è identicamente nulla. Calcoliamo la derivata di g:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{2}}} \frac{-1/2}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1/2}{\sqrt{\frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^2}{4}}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}\left(1 - \frac{1-x}{2}\right)}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{4}}} = 0$$

Quindi $g'(x) = 0$, possiamo concludere che $g(x)$ è costante. Ma

$$g(0) = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = 0$$

Quindi la funzione g è costante e in 0 vale 0; possiamo concludere che $\forall x \in [0,1), g(x) = 0$. Quindi $\forall x \in [0,1)$

$$\arccos x - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) = 0$$

$$\arccos x = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

4. Esplicitiamo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall x \in (-\delta_\varepsilon, 0) \Rightarrow -\varepsilon < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$$

Cioè

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{x} > \log_{1/2} \varepsilon > 0$$

Assurdo perché $1/x < 0$ e $\log_a \varepsilon > 0$, per ε piccolo.

Quindi l'asserzione è falsa.

5. L'affermazione è falsa e un controesempio è $f(x) = \frac{1}{x}$. Infatti questa funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nel suo dominio $f'(x)$ è negativa perché $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ma non è descrescente, o meglio, è descrescente nella semiretta negativa e nella semiretta positiva considerate separatamente, ma

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

quindi per passare dalle x negative alle x positive la funzione cresce.

FOGLIO 5

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 - x\sin x}{x^2 \ln(1+x^2) - \cos(x^2) + 1}$$

2. Costruire il polinomio di MacLaurin di ordine 2 della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$. Calcolare, inoltre
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2(\sin x - x\sqrt{1+x})}{x(1-\cos x)}$$

3. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α
$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

4. Calcolare, al variare del parametro reale α
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x^2} - 1 + x^2}{x(\sin(3x) - 3x)}$$

5. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(3x) + x^3}{x^{1/3} \sin x^{5/3}}$$

6. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^\alpha}$$

7. Siano $f(x) = o(\sin x)$ e $g(x) = o(x)$, per $x \to 0$. Dimostrare o confutare che

$$f(x) + g(x) = o(\sin(x) + x), x \to 0$$

8. Siano $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, per $x \to x_0$. Dimostrare o confutare che

   (a) $f(x) = o(h(x)), x \to x_0$

   (b) $f(x) = o(g(x)h(x)), x \to x_0$

SVOLGIMENTO

1. Per calcolare il limite dato dobbiamo scrivere lo sviluppo di McLaurin delle funzioni e^{x^2}, $\sin x$, $\cos(x^2)$ e $\ln(1+x^2)$.

   Sviluppando la formula del polinomio di McLaurin otteniamo, ponendo $t = x^2$, per $x \to 0$:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

cioè

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

cioè

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

ed infine

$$\ln(1+t) = t + o(t)$$

cioè

$$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$

Sostituendo nel limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 - x\sin x}{x^2 \ln(1+x^2) - \cos x^2 + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4) - 1 - x^2 + x^4/6 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4) - 1 + x^4/2 + o(x^4) + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^4/3 + o(x^4)}{3x^4/2 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2/3 + o(1)}{3/2 + o(1)} = \frac{4}{9}$$

2. Innanzitutto scriviamo il polinomio di McLaurin di ordine 2 della funzione $\sqrt{1+x}$; ricordando che

$$(\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$(\sqrt{1+x})'' = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$$

possiamo scrivere per $x \to 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Per calcolare il limite sviluppiamo il polinomio di McLaurin delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ora che abbiamo trovato tutti gli sviluppi di McLaurin che ci interessavano possiamo sostituirli nel limite da calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2(\sin x - x\sqrt{1+x})}{x(1-\cos x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2(x - x^3/6 + o(x^3) - x - x^2/2 + x^3/8 + o(x^3))}{x^3/2 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/3 + x^3/4 + o(x^3)}{x^3/2 + o(x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/12 + o(x^3)}{x^3/2 + o(x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1/12 + o(1)}{1/2 + o(1)} = -\frac{1}{6}$$

3. Vogliamo trasformare, attraverso un cambio di variabile del tipo $t = f(x)$, il limite per $x \to +\infty$ in un limite per $t \to 0^+$.In questo modo per calcolare il limite possiamo sviluppare il polinomio di McLaurin di ogni funzione al suo interno. Ci riusciamo ponendo $t = \frac{1}{x}$. Ricordando, poi, il seguente sviluppo di McLaurin

$$\ln(1+t) = t + o(t)$$

Possiamo andare a sostituire nel limite ottenendo:

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^\alpha}(t + o(t))\right) =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{t^{\alpha-2}}(1 + o(1))\right] =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[1 - t^{2-\alpha}(1 + o(1))\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{0}{0} \text{ forma indet.} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Il primo caso dà origine a una forma indeterminata, che dobbiamo risolvere. In questo caso può essere utile sviluppare $\ln(1 + t)$ fino al secondo ordine. Infatti:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

E sostituendo, con $\alpha = 2$:

$$\lim_{t\to o^+} \frac{1}{t}\left[1 - (1 - \frac{t}{2} + o(t))\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}$$

Dunque possiamo concludere che il limite dato è uguale a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

4. Innanzitutto sviluppiamo vicino a 0, attraverso la formula di McLaurin, le funzioni $e^{\alpha x^2}$ e $\sin(3x)$. Ponendo $t = x^2$ abbiamo:

$$e^{\alpha x^2} = e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2) =$$

$$= 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{27x^3}{3!} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^3}{2} + o(x^3)$$

Ora che abbiamo trovato gli sviluppi cercati, possiamo sostituirli nel limite, che calcoliamo:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4) - 1 + x^2}{3x^2 - \frac{9x^4}{2} + o(x^4) - 3x^2} =$$

$$= \frac{(\alpha+1)x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)}{-\frac{9x^4}{2} + o(x^4)} =$$

$$= \frac{(\alpha+1) + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{9} & \text{se } \alpha = -1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > -1 \end{cases}$$

5. Dobbiamo sviluppare vicino a 0 le funzioni $\cos(3x)$ e $\sin(x^{5/3})$:

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

e, ponendo $t = x^{5/3}$,

$$\sin(t) = t + o(t) = x^{5/3} + o(x^{5/3})$$

Ora, come fatto negli esercizi precedenti, sostituiamo gli sviluppi nel limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(3x) + x^3}{x^{1/3} \sin x^{5/3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 1 + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) + x^3}{x^{1/3}(x^{5/3} + o(x^{5/3})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{9x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{9}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{9}{2}$$

E' da notare che nel terzultimo passaggio abbiamo inglobato il termine x^3 nell'$o(x^2)$.

6. Riportiamo il nostro studio vicino a 0 ponendo $t = x - 1$. Così facendo infatti si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^\alpha} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} =$$

dallo sviluppo dell'arcotangente $\arctan t = t + o(t)$,

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t + o(t)}{t^\alpha} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1 + o(1)}{t^{\alpha-1}} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

7. Dalla definizione di $o(\sin x + x)$ dobbiamo verificare o confutare che vale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + g(x)}{\sin x + x} = 0$$

Ma questo limite è uguale a

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(\sin x) + o(x)}{\sin x + x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(\sin x)}{\sin x + x} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{\sin x + x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{o(\sin x)}{\sin x}}{\left(1 + \frac{x}{\sin x}\right)} + \lim_{x\to 0} \frac{\frac{o(x)}{x}}{\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Perché in entrambi i membri dell'addizione il numeratore tende a 0 per ipotesi, mentre il denominatore tende a 2 per il limite notevole seguente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

8. 1. Come nell'esercizio precedente dobbiamo dimostrare o confutare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$$

Ma questo limite è uguale a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{h(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

perché $\lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$ e, per ipotesi, $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$.

2. Al solito dobbiamo dimostrare o confutare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)h(x)} = 0$$

Questo limite è uguale a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)h(x)}$$

che non è detto che sia uguale a 0, perché è vero che $\lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$ per ipotesi, ma diviso per una funzione incognita $h(x)$ non è detto che il limite resti 0.

Per trovare un controesempio possiamo prendere le seguenti tre funzioni:

$$f(x) = (x - x_0)^\alpha, g(x) = (x - x_0)^\beta, h(x) = (x - x_0)^\gamma$$

con $\alpha > \beta, \beta > \gamma, \alpha \leq \beta + \gamma$.

Ad esempio $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$, quindi

$$f(x) = (x - x_0)^3, g(x) = (x - x_0)^2, h(x) = (x - x_0)^1$$

Infatti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^3}{(x - x_0)^2(x - x_0)^1} = 1 \neq 0$$

FOGLIO 6

1. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k\sqrt{k}+1}\right)$$

2. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\ln k}$$

3. Studiare il carattere della serie, al variare del parametro reale x
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(kx)}{e^k - 1}$$

4. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{k}+1)\right)$$

5. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\sin k} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

6. Studiare il carattere della serie, al variare del parametro reale α
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha^2-3\alpha)}$$

7. Studiare per quali valori del parametro reale positivo α la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right) k^{3/2-2\alpha}$$

converge.

8. Studiare al variare del parametro reale x il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|x-1|-1)^k$$

9. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k+3}}$$

ed eventualmente calcolarne la somma.

SVOLGIMENTO

1. Per studiare il carattere della serie possiamo utilizzare il Criterio del confronto asintotico. In particolare vorremmo confrontare la serie data con la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha}$, $\alpha > 0$, di cui conosciamo il comportamento al variare di α: per $\alpha > 1$ converge mentre per $\alpha \leq 1$ diverge.

   Quindi dobbiamo studiare

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{k^{3/2}+1}\right)}{k^{-\alpha}} = \frac{0}{0}$$

   Applicando il Teorema di De L'Hospital, e riportando il nostro studio alle funzioni associate delle successioni numeriche

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^{3/2}+1}\right)^2} \cdot \frac{-\frac{3}{2}x^{1/2}}{(x^{3/2}+1)^2}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2\alpha}\frac{x^{3/2+\alpha}}{x^3+2x^{3/2}+2}$$

   Questo limite è uguale a 1 se $\frac{3}{2}+\alpha = 3$, cioè se $\alpha = \frac{3}{2}$, che è maggiore di 1. La serie data, dunque, ha lo stesso comportamento asintotico della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{3/2}$, che converge, essendo $3/2 > 1$, dunque converge.

2. Anche in questo esercizio vogliamo applicare il Criterio del confronto asintotico. Come prima vogliamo confrontare la serie data con la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Quindi andiamo a studiare

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\alpha}}{k^{1/2}\ln k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\alpha-1/2}}{\ln k}$$

   Ora, se $\alpha \in (0, 1/2]$, il limite è 0, se $\alpha \in (1/2, 1]$ il limite è $+\infty$, ed infine se $\alpha > 1$ il limite è $+\infty$. Nel primo e nel terzo caso non possiamo dedurre nulla, in quanto nel primo caso la serie con cui stiamo confrontando diverge ma il limite del rapporto tra le due successioni è nullo e nel terzo la serie con cui stiamo confrontando converge, ma il limite è $+\infty$. Il caso che ci permette di concludere è il secondo; infatti per $\alpha \in (1/2, 1]$ la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha}$ diverge e il limite del rapporto tra le successioni viene $+\infty$, dunque possiamo dire che anche la serie data diverge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\ln k} = +\infty$$

3. In questo esercizio possiamo applicare il Teorema del confronto tra le serie; infatti

$$\frac{\cos^2(kx)}{e^k - 1} \leq \frac{1}{e^k - 1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Il membro di destra della precedente disuguaglianza è asintoticamente uguale a $\frac{1}{e^k}$, perché

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^k - 1}}{\frac{1}{e^k}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{e^k}{e^k - 1} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^k - 1}\right) = 1$$

Sappiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k}$ converge, dunque possiamo concludere che la serie data converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Vogliamo applicare il Criterio del confronto asintotico. Studiamo, quindi

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{k} + 1)}{k^{-\alpha}}, \alpha > 0$$

Questa è una forma indeterminata $0/0$, dunque proviamo a risolvere il limite attraverso il Teorema di De L'Hospital e le funzioni associate alle successioni all'interno del limite:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha+1/2}}{x + 2\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{2\alpha}$$

Questo limite è uguale a $\frac{1}{2\alpha}$ se $\alpha + 1/2 = 1$, cioé $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che la serie data asintoticamente si comporta come la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$, la quale diverge, dunque diverge.

5. Possiamo dire che:
$$e^{\sin(k)} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq e \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
essendo e^x una funzione crescente.

Ora ci chiediamo se converge $\sum_{k=1}^{\infty} e \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Questa serie converge perché
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{e \sin(h^2)}{h^2} = e$$
Dunque applicando il criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ si comporta asintoticamente come la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2$, la quale converge, dunque converge. Ma essendo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} e \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ una maggiorante della serie data, possiamo dire che anche quest'ultima converge.

6.
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha^2-3\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha^2-3\alpha)}\right)^k$$
Il membro di destra della precedente uguaglianza è una serie geometrica di ragione $2^{(\alpha^2-3\alpha)}$. Dunque

- Converge se
$$-1 < 2^{(\alpha^2-3\alpha)} < 1$$
Cioè
$$0 < \alpha < 3$$
- Diverge se
$$2^{(\alpha^2-3\alpha)} \geq 1$$
Cioè
$$\alpha \leq 0 \text{ o } \alpha \geq 3$$
- E' indeterminata se
$$2^{(\alpha^2-3\alpha)} \leq -1$$
cioé per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nel caso in cui converge, cioè per $0 < \alpha < 3$, possiamo calcolare il valore della somma della serie geometrica
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha^2-3\alpha)}\right)^k = \frac{1}{1-2^{(\alpha^2-3\alpha)}}$$

7. Vogliamo utilizzare il Criterio del confronto asintotico. Quindi studiamo
$$\lim_{k\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right) k^{3/2-2\alpha+\beta}, \beta > 0$$
che, ponendo $h = \frac{1}{k}$ e sviluppando $\sin(h^{3\alpha})$ con la formula di McLaurin, diventa
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(h^{3\alpha})}{h^{3/2-2\alpha+\beta}} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{3\alpha} + o(h^{3\alpha})}{h^{3/2-2\alpha+\beta}} = 1$$
Se $3\alpha = \frac{3}{2} - 2\alpha + \beta$, cioè
$$\beta = 5\alpha - \frac{3}{2}$$
Quindi, se $\beta > 1$, converge, mentre se $\beta \leq 1$ diverge.

Possiamo concludere, quindi, che la serie converge se $5\alpha - \frac{3}{2} > 1$, cioé $\alpha > \frac{1}{2}$, mentre diverge se $5\alpha - \frac{3}{2} \leq 1$, cioé $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

8. La serie in questione è una serie geometrica di ragione $Q = |x-1| - 1$. Dunque

   - Diverge se $Q \geq 1$, cioè se $x \in (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$
   - Converge se $-1 < Q < 1$, cioé se $x \in (-1, 3) \setminus \{1\}$
   - E' impropria se $Q = -1$, cioè se $x = 1$

9. Riscriviamo la serie come segue
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k+3}} = \frac{2}{3^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$
Dunque converge perché è una serie geometrica di ragione minore di 1. Essendo una serie geometrica possiamo anche calcolare la somma:
$$\frac{2}{3^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{1-2/3} = \frac{2}{9}$$

FOGLIO 7

1. Determinare in $\mathbb{R}$ tutte le primitive della funzione

$$g(x) = |x-1|$$

Calcolare l'espressione esplicita della funzione integrale

$$f(x) = \int_{-1}^{x} g(t)\ dt$$

2. Sia $f(x) = \cos(1-e^{-x})$. Senza calcolare esplicitamente le derivate successive della funzione, calcolare $f^{(6)}(0)$.

3. Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z|z|^2 - 9i\bar{z} = 0$$

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{1/k^2} - 1\right) k^{3/2-\alpha}$$

5. Dimostrare che

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o[x^5], x \to 0$$

SVOLGIMENTO

1. Esplicitando il modulo si ha

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Poiché g è continua in $\mathbb{R}$, tutte e sole le primitive di g differiscono per una costante arbitraria e sono continue. Esse hanno espressione

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & \text{se } x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \alpha(c) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ e $\alpha(c)$ tale che $G(x)$ risulti continua in 1, cioè

$$\lim_{x \to 1^-} G(x) = G(1)$$

che vuol dire

$$-\frac{1}{2} + 1 + \alpha(c) = \frac{1}{2} - 1 + c$$

cioè $\alpha(c) = c - 1$.

Quindi tutte le primitive di $g(x)$ in $\mathbb{R}$ sono le funzioni

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & \text{se } x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$\forall c \in \mathbb{R}$.

Dal *II* Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$f(x) = G(x) - G(-1)$$

Ora $G(-1) = -\frac{1}{2} - 1 + c - 1 = -\frac{5}{2} + c$. Dunque

$$f(x) = G(x) - G(-1) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{2} & \text{se } x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x - 1 + \frac{5}{2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

cioè

$$f(x) = G(x) - G(-1) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{2} & \text{se } x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

2. Per calcolare $f^{(6)}(0)$ senza calcolare esplicitamente le derivate successive della funzione, l'idea è quella di costruire lo sviluppo di McLaurin di ordine 6 di $f(x)$ e considerare il coefficiente di $\frac{x^6}{6!}$, che rappresenta proprio $f^{(6)}(0)$.

   Cominciamo, quindi, costruendo lo sviluppo di McLaurin della funzione $\cos(t)$.
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + o(t^6), t \to 0$$
   Poi
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + o(t^6), t \to 0$$
   Quindi
$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$
   Ed infine, ponendo $t = 1 - e^{-x}$ otteniamo
$$\cos(1 - e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}[x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{3!3!} + \frac{2}{5!}x^6 - \frac{2}{4!}x^5 + \frac{2}{3!}x^4 - x^3 +$$
$$\frac{1}{4!}x^6 - \frac{1}{3!}x^5 + o(x^6)] + \frac{1}{4!}[x^4 + x^6 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{4}{3!}x^6 - 2x^5 + o(x^6] - \frac{1}{6!}[x^6 + o(x^6)]$$
   Il coefficiente di x^6 è
$$-\frac{1}{2 \cdot 3! \cdot 3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{4}{4! \cdot 3!} - \frac{1}{6!} =$$
$$= \frac{1}{6!}\left(-\frac{6!}{2 \cdot 3! \cdot 3!} - \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{6!}(-10 - 6 + 30 + 20 - 1) = \frac{33}{6!}$$
   Dunque possiamo concludere che $f^{(6)}(0) = 33$.

3. Moltiplicando ambo i membri per z si ha
$$z^2|z|^2 - 9i|z|^2 = 0$$
$$|z|^2(z^2 - 9i) = 0$$
   $z = 0$ è una soluzione; ora studiamo
$$z^2 - 9i = 0$$

che ha come soluzioni $z = 3\sqrt{i}$. Le radici di i sono

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), k = 0, 1$$

per $k = 0$ abbiamo la radice $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Per $k = 1$ abbiamo la radice $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Dunque possiamo concludere che le soluzioni dell'equazione sono 3:

- $z_1 = 0$
- $z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$
- $z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$

4. Per risolvere l'esercizio vogliamo sfruttare il seguente limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dunque trasformo la serie data, in questo modo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{1/k^2} - 1\right) k^{3/2-\alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k^2} - 1}{k^{\alpha-3/2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k^2} - 1}{k^{-2+\alpha+1/2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k^2} - 1}{k^{-2} \cdot k^{\alpha+1/2}}$$

Quest'ultima serie si comporta come

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1/2}}$$

perché, come dicevamo all'inizio,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{1/k^2} - 1}{1/k^2} = 1$$

Ma la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1/2}}$ converge per $\alpha + 1/2 > 1$, cioé per $\alpha > 1/2$. Quindi anche la serie data nell'esercizio convergerà per $\alpha > 1/2$.

5. E' equivalente dimostrare che

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 = o[x^5], x \to 0$$

Ma

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 = -\frac{x^6}{1+x^2}$$

Per dimostrare l'uguaglianza dobbiamo quindi verificare che

$$-\frac{x^6}{1+x^2} = o(x^5)$$

cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^6}{1+x^2}}{x^5} = 0$$

E questo è vero perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^6}{1+x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{1+x^2} = 0$$