I seguenti esercizi sono stati risolti dagli studenti e corretti dal docente

1. Studiare il carattere della serie numerica $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log\left(k\sqrt{k}\right)}$.

Si ha $\frac{1}{k\log\left(k\sqrt{k}\right)} = \frac{1}{k\log k^{3/2}} = \frac{2}{3k\log k}$. Tale successione è decrescente e infinitesima, inoltre si ha $\lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{2}{3t\log t}dt = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{3}\log(\log t)\Big]_2^k = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{3}\left(\log(\log k)-\log(\log 2)\right) = +\infty$ .Per il criterio dell'integrale la serie data diverge.

2. Sia $f(x) = \int_4^x \left|\log(t-3)\right| dt$ **.**

a) determinare il dominio *D* di *f* e giustificare l'invertibilità di *f* su tutto *D*;
b) detta *g* l'inversa di *f*, determinarne il dominio *D* e il codominio *C*;
c) determinare l'insieme di derivabilità di *g* e calcolare *g* (*x*) esprimendola in termini di *g*(*x*).

La funzione integranda $h(t) = \left|\log(t-3)\right| = \begin{cases} \log(t-3) & se\ t \geq 4 \\ -\log(t-3) & se\ t < 4 \end{cases}$ è definita e continua in $(3,+\infty)$; tale intervallo sarà allora il dominio *D* di *f*. Poiché $f'(x) = \left|\log(x-3)\right| \geq 0$ (si annulla solo in 4) si ha che *f* è strettamente crescente in *D* e quindi ivi invertibile. Calcoliamo l'espressione esplicita di *f*; si ha

$$f(x) = \begin{cases} \int_4^x \log(t-3)dt & se\ x \geq 4 \\ -\int_4^x \log(t-3)dt & se\ 3 < x < 4 \end{cases}.$$

$\int_4^x \log(t-3)dt = x\log(x-3) - \int_4^x \frac{t}{t-3}dt = (x-3)\log(x-3)-(x-4)$ da cui

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)\log(x-3)-(x-4) & se\ x \geq 4 \\ (x-4)-(x-3)\log(x-3) & se\ 3 < x < 4 \end{cases}.$$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Quindi il condominio di *f* è $(-1,+\infty)$. La funzione inversa di f avrà come dominio e condominio rispettivamente gli intervalli $(-1,+\infty)$ e $(3,+\infty)$.
Poiché $f'(x) = 0$ per $x = 4$ ed essendo $f(4) = 0$, per il teorema sulla derivabilità delle funzioni inverse, la funzione inversa *g* sarà derivabile in $(-1,+\infty)-\{0\}$ nei cui punti del quale si avrà

$$g'(y) = \frac{1}{f'[g(y)]} = \frac{1}{\left|\log(g(y)-3)\right|}.$$

3. Studiare il carattere della serie numerica $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{k\sqrt[5]{k}+\log k^2}$.

Si ha $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^{\alpha}\sqrt[3]{k}}{k\sqrt[5]{k}+\log k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^{\alpha+\frac{1}{3}}}{k^{\frac{6}{5}}+\log k^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Passando alle funzioni associate e applicando la regola di De l'Hospital si ottiene che per $\alpha=\dfrac{13}{15}$ il suddetto limite è 1. Per il criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

4. Studiare il carattere della serie numerica $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$.

Ponendo $h=\dfrac{1}{k}$, si ha $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{\frac{1}{k^{\alpha}}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h^{1/3}}{h^{\alpha}}=1$ per $\alpha=\dfrac{1}{3}$. Per il criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

5. Studiare il carattere della serie numerica $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2}}{\sqrt{k^2+k+1}}$.

$$\lim_{k\to+\infty}=\frac{k^{\alpha}\left(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+2}\right)}{\sqrt{k^2+k+1}}=\lim_{k\to+\infty}=\frac{2k^{\alpha}}{\sqrt{k^2+k+1}\left(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+2}\right)}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\dfrac{k^3+5k^2+5k+4}{k^{2\alpha}}}+\sqrt{\dfrac{k^3+3k^2+3k+2}{k^{2\alpha}}}}=1\quad\text{per}\quad\alpha=\frac{3}{2}.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

6. Sia $\{s_k\}=\left\{\sqrt[k]{a_k}+1\right\}$ una successione numerica tale che $1<\sup s_k<2$ e $a_k>0$. Dimostrare che la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ converge.

Denotiamo $\Lambda=\sup s_k$; per ipotesi si ha $1<\Lambda<2$. Essendo Λ un maggiorante della successione $\{s_k\}=\left\{\sqrt[k]{a_k}+1\right\}$ si ha

$$\sqrt[k]{a_k}+1<\Lambda\Rightarrow a_k<\left(\Lambda-1\right)^k.$$

Quindi la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ è dominata dalla serie geometrica $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\Lambda-1\right)^k$. Poiché $0<\Lambda-1<1$, dal criterio del confronto segue che la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ converge.

7. Determinare il dominio e il condominio della funzione $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{|t-1|}{t^2-t-2}\,dt$.

La funzione integranda $\frac{|t-1|}{t^2-t-2}$ è definita e continua nell'insieme $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$. Poiché l'estremo inferiore d'integrazione appartiene all'intervallo $(-1,2)$, quest'ultimo sarà il dominio di *f*.

Si ha $f'(x)=\frac{|x-1|}{x^2-x-2}<0 \quad \forall x\in(-1,2)$. Quindi, essendo *f* strettamente decrescente e continua in $(-1,2)$, si ha che il codominio di f è $\left(\lim_{x\to 2} f(x), \lim_{x\to -1} f(x)\right)$. Per calcolare gli estremi di tale intervallo occorre determinare l'espressione esplicita di *f*.

Si ha

$$\frac{|t-1|}{t^2-t-2}=\begin{cases}\frac{t-1}{t^2-t-2} & se\, t\ge 1\\ \frac{1-t}{t^2-t-2} & se\, t<1\end{cases}$$

quindi

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^1 \frac{1-t}{t^2-t-2}dt+\int_1^x \frac{t-1}{t^2-t-2}dt & se\ x\in[1,2)\\ \int_0^x \frac{1-t}{t^2-t-2}dt & se\ x\in(-1,1)\end{cases}.$$

Si ha, mediante la tecnica dei fratti semplici,

$$\int \frac{1-t}{t^2-t-2}dt=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-2}-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t+1}=-\frac{1}{3}\log|t-2|-\frac{2}{3}\log|t+1|+c.$$

Quindi

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\log|x-2|+\frac{2}{3}\log|x+1|+\log 2 & se\ x\in[1,2)\\ -\frac{1}{3}\log|x-2|-\frac{2}{3}\log|x+1|+\frac{1}{3}\log 2 & se\ x\in(-1,1)\end{cases}$$

Allora il codominio è $\left(\lim_{x\to 2} f(x), \lim_{x\to -1} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

8. Siano $f(x)=\int_{-\sqrt{10}-1}^{x} \log\left(t^2+2t-8\right)dt$ e $g(x)=\int_{-\sqrt{10}-2}^{x} \log\left(t^2+2t-8\right)dt$

1) Determinare il dominio di $f(x)$ e $g(x)$;
2) Stabilire se sono invertibili nei rispettivi domini;
3) Giustificare la disuguaglianza $f(x)<g(x)$ per ogni *x* appartenente al dominio di *f* e *g*.

La funzione integranda $h(t)=\log\left(t^2+2t-8\right)$ è definita e continua nell'insieme $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$. Poiché entrambi gli estremi inferiori di integrazione appartengono all'intervallo $(-\infty,-4)$, quest'ultimo sarà il dominio di *f* e di *g*.

Si ha $f'(x)=g'(x)=\log\left(x^2+2x-8\right)$. Studiando il segno di tale funzione si ottiene

$$f'(x)=g'(x)\begin{cases} >0 & per \quad x<-1-\sqrt{10} \\ =0 & per \quad x=-1-\sqrt{10} \\ <0 & per \quad -1-\sqrt{10}<x<-4 \end{cases}$$

da cui segue che il punto $-1-\sqrt{10}$ è un punto di massimo per *f* e per *g*. Quindi tali funzioni non sono invertibili nel loro dominio.
Poiché *f* e *g* sono primitive di una stessa funzione nell'intervallo $\left(-\infty,-4\right)$ esse differiscono per una costante; inoltre, essendo $-1-\sqrt{10}$ un punto di massimo per entrambe e avendo $f(-\sqrt{10}-1)=g(-\sqrt{10}-2)=0$ con $-\sqrt{10}-2<-\sqrt{10}-1$, si ha $f(x)<g(x) \quad \forall x\in\left(-\infty,-4\right)$.

9. Determinare il dominio e l'espressione esplicita della funzione $f(x)=\int_1^x \frac{\left|\log\left(t+1\right)\right|}{t+1}dt$ **.**

La funzione integranda $h(t)=\frac{\left|\log\left(t+1\right)\right|}{t+1}=\begin{cases} \frac{\log\left(t+1\right)}{t+1} & se\, t\geq 0 \\ -\frac{\log\left(t+1\right)}{t+1} & se\, t<0 \end{cases}$ è definita e continua in $\left(-1,+\infty\right)$; tale intervallo sarà allora il dominio *D* di *f*. Calcoliamo l'espressione esplicita di *f*; si ha

$$f(x)=\begin{cases} \int_1^x \frac{\log\left(t+1\right)}{t+1}dt & se\; x\geq 0 \\ -\int_0^x \frac{\log\left(t+1\right)}{t+1}dt+\int_1^0 \frac{\log\left(t+1\right)}{t+1}dt & se\; -1<x<0 \end{cases}.$$

$\int \frac{\log\left(t+1\right)}{t+1}dt=\frac{\log^2\left(t+1\right)}{2}+c$ da cui

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\log^2\left(x+1\right)-\log^2\left(2\right)}{2} & se\; x\geq 0 \\ -\frac{\log^2\left(x+1\right)+\log^2\left(2\right)}{2} & se\; -1<x<0 \end{cases}.$$

10. Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie a termini di segno positivo convergente e $\left\{b_k\right\}$ una successione limitata superiormente ($\Lambda=\sup b_k$). Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{b_k}$ converge.

$\forall k\in\mathbb{N}$ si ha $a_k\, e^{b_k}\leq a_k\, e^{\Lambda}$. Quindi la serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{\Lambda}=e^{\Lambda}\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ domina la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{b_k}$. Per il criterio del confronto anche quest'ultima converge.

11. Studiare il carattere della serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\log k}}$

La funzione associata $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\log x}}$ è decrescente nell'intervallo $[2, +\infty)$, inoltre poiché è facilmente integrabile si utilizza il criterio dell'integrale. Si ha

$$t_k = \int_2^k \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \int_2^k (\log x)^{-1/2} \left(\frac{d}{dx} \log x \right) dx = 2(\log x)^{1/2} \Big]_2^k = 2\sqrt{\log k} - 2\sqrt{\log 2}\,.$$

Essendo $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, si ha che la serie diverge.

12. Studiare il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^2 k}{k\sqrt{k}}$

Si ha $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^2 k}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^2 k}{k^{\frac{3}{2}}}$. Si applica il criterio del confronto asintotico.

$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^\alpha \cdot \log^2 k}{k^{3/2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\log^2 k}{k^{3/2-\alpha}}$ con $0 < \alpha < 3/2$.

Poiché si ottiene una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, si considera la funzione associata e si utilizza la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{x^{3/2-\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{(3/2-\alpha)x^{3/2-\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(3/2-\alpha)^2 \cdot x^{3/2-\alpha}} = 0$$

Scegliendo, in particolare, α compreso tra 1 e 3/2 si ha dal criterio del confronto asintotico che la serie converge.

13. Studiare il carattere della serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{\log^2 k}}$

La funzione associata $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{\log^2 x}}$ è decrescente nell'intervallo $[2, +\infty)$, inoltre poiché è facilmente integrabile si utilizza il criterio dell'integrale. Si ha

$$t_k = \int_2^k \frac{dx}{x\sqrt[3]{\log^2 x}} = \int_2^k (\log x)^{-2/3} \left(\frac{d}{dx} \log x \right) dx = 3(\log x)^{1/3} \Big]_2^k = 3\sqrt[3]{\log k} - 3\sqrt[3]{\log 2}\,.$$

Essendo $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, si ha che la serie diverge.

14. Studiare il carattere della serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\log k}$

Si ha $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\log k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k}$. Inoltre, essendo $\frac{1}{\log k} > \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 2$, la serie data domina una la serie armonica. Di conseguenza essa diverge.

15.Studiare il carattere della serie $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}\,\log k}$

Si ha $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}\,\log k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{-2/3}}{\log k}$. Si applica il criterio del confronto asintotico.

$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^{\alpha-2/3}}{\log k}$ con $\alpha>2/3$.

Poiché si ottiene una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, si considera la funzione associata e si utilizza la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-2/3}}{\log x}=\lim_{x\to+\infty}(\alpha-2/3)x^{\alpha-2/3}=+\infty$$

Scegliendo, in particolare, α compreso tra 2/3 e 1 si ha dal criterio del confronto asintotico che la serie diverge.

16.Studiare il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{k}}{k\sqrt[3]{k}+\log k^2}$

Si ha $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{k}}{k\sqrt[3]{k}+\log k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1/5}}{k^{4/3}+2\log k}$. Si applica il criterio del confronto asintotico.

$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^{\alpha+1/5}}{k^{4/3}+2\log k}=1$ se $\alpha+\frac{1}{5}=\frac{4}{3}$, cioè se $\alpha=\frac{17}{15}$. Quindi la serie converge.

17. Determinare le radici cubiche del numero complesso $z=\frac{1+2i}{3+i}$.

Possiamo scrivere $z=\frac{1+2i}{3+i}\frac{3-i}{3-i}=\frac{1}{2}(1+i)$. Quindi si ha $|z|=\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $\operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{4}$.

Si ottiene $\sqrt[3]{z}=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi\right)\right]\quad k=0,1,2$.

$$k=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{z}\right)_0=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt[6]{2}}\left[\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right]$$

$$k=1\Rightarrow\left(\sqrt[3]{z}\right)_1=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt[3]{16}}{4}(-1+i)$$

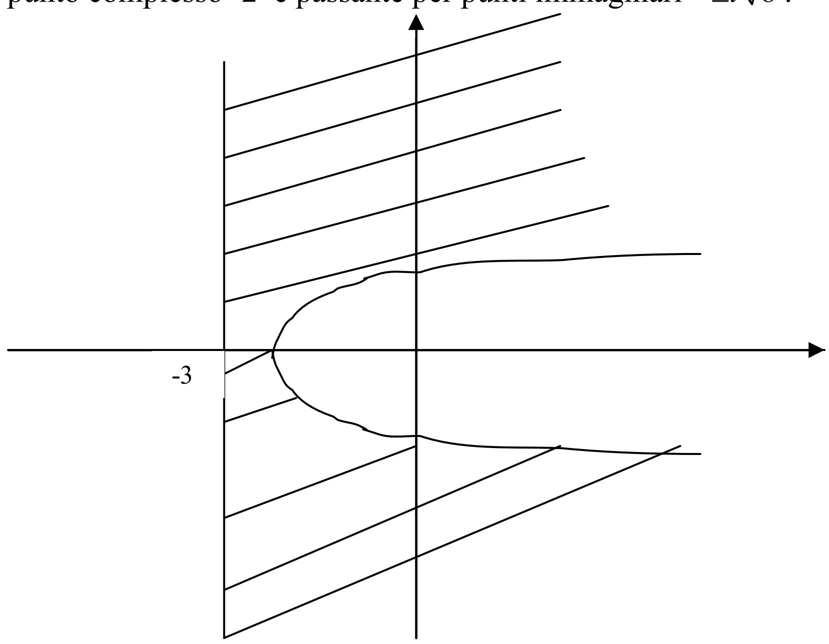
$$k=2\Rightarrow\left(\sqrt[3]{z}\right)_2=\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]=-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$
$$\frac{-1}{2\sqrt[6]{2}}\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right].$$

18. Determinare nel piano di Gauss tutti i numeri complessi z che soddisfano la disuguaglianza $|z+1|\le \operatorname{Re}(z)+3$.

Poniamo $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$. Poiché $|z+1| = |(x+1)+iy| = \sqrt{x^2+y^2+2x+1}$, la disuguaglianza diventa $\sqrt{x^2+y^2+2x+1} \le x+3$. Essa equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+1 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \\ x \le \dfrac{y^2}{4} - 2 \end{cases}.$$

La prima disequazione è soddisfatta per ogni x ed y reali, quindi per ogni numero complesso.
La seconda disequazione è soddisfatta per ogni $x \ge -3$ e per ogni y reale, quindi per ogni numero complesso che giace a destra nel semipiano delimitato dalla retta di equazione $x = -3$.
La terza disequazione è soddisfatta per ogni punto complesso che giace nella zona del piano di Gauss esterna alla parabola di equazione $x = \dfrac{y^2}{4} - 2$ con asse di simmetria l'asse reale, vertice nel punto complesso -2 e passante per punti immaginari $\pm i\sqrt{8}$.



19. Determinare due numeri complessi distinti z e w tale che ciascuno di essi sia il quadrato dell'altro.

Si deve avere $\begin{cases} z = w^2 \\ w = z^2 \end{cases}$. Elevando al quadrato entrambi i membri della prima equazione e sostituendo il risultato ottenuto nella seconda equazione si ottiene la relazione $w = w^4$.
Tale equazione ammette quattro soluzioni nel campo complesso una delle quali è $w_1 = 0$. In corrispondenza a tale valore si ha, dalla prima equazione del sistema, $z = 0$. Tali valori sono da escludere perché si richiede che z e w siano distinti. Le altre tre soluzioni dell'equazione sono le radici cubiche del numero 1 cioè: $w_2 = 1$, $w_3 = \frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ e $w_4 = \frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$.
Per $w = 1$ si ottiene, dalla prima equazione del sistema, $z = 1$; quindi anche tali valori sono da escludere.

Per $w=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ si ottiene, dalla prima equazione del sistema, $z=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$.

Mentre per $w=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ si ottiene, dalla prima equazione del sistema, $z=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

Allora gli unici due numeri complessi che soddisfano alle condizioni poste dall'esercizio sono $\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ e $\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$.

20. Studiare il carattere della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(k\pi+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

Si ha $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi+\frac{1}{\sqrt{k}})=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Poiché il termine generico della serie è in modulo una successione decrescente a 0, la convergenza segue dal criterio di Leibniz.

21. Integrare la seguente equazione differenziale $y'=\frac{y}{x}+2y^2\cos x \quad x>0$.

É una eq. di Bernoulli. Posto $y\neq 0$ e $v=y^{-1}$ si ha $v'+\frac{v}{x}=-2\cos x \quad x>0$. Quindi

$v=\frac{-2\left(x\sin x+\cos x\right)+c}{x}$ e $y=\frac{x}{-2\left(x\sin x+\cos x\right)+c}$.

22. Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 9x-\cos 3x}{\cos 7x-\cos 5x}$.

Usando le formule di Prostaferesi si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 9x-\cos 3x}{\cos 7x-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}=3.$$

23. Stabilire per quali valori di x la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(k^{\frac{1-x}{x+1}}\right)$ converge.

Per la condizione necessaria di convergenza deve essere $\lim_{k\to+\infty}\sin\left(k^{\frac{1-x}{x+1}}\right)=0$. Questo si ha solo se $\frac{1-x}{x+1}<0$ cioè $x<-1$ e $x>1$. Applico il criterio del confronto asintotico.

$\lim_{k\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{k^{\frac{x-1}{x+1}}}\right)}{\frac{1}{k^{\alpha}}}$ e scelgo il parametro α affinché tale limite esiste finito (sia uguale a 1).

Affinché ciò accada basta prendere $\alpha=\frac{x-1}{x+1}$. Allora si ha la convergenza se $\frac{x-1}{x+1}>1$ e se $x<-1$ e $x>1$ Segue che la serie converge per $x>1$.

24. Stabilire se la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sin\sqrt{k^3}}$ converge.

La serie non può convergere perché non soddisfa la condizione necessaria di convergenza $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sin\sqrt{k^3}}\neq 0$.

25. Calcolare il seguente integrale indefinito $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+2}dx$.

Si pone $x = t^3-1$, $dx = 3t^2\,dt$. Allora

$$\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+2}dx=\int\frac{t}{t^3+1}3t^2dt=\int\frac{3t^3}{t^3+1}dt=\int 3dt-3\int\frac{1}{t^3+1}dt=3t-3\int\frac{1}{t^3+1}dt;$$

$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}=\frac{At^2-At+A+Bt^2+Bt+Ct+C}{(t+1)(t^2-t+1)},$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ -A+B+C=0\\ A+C=1\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}A=\frac{1}{3}\\ B=-\frac{1}{3}\\ C=\frac{2}{3}\end{array}$$

$$\int\frac{dt}{t^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int\frac{2-t}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{3}\ln|1+t|+\frac{1}{3}\int\frac{2}{t^2-t+1}dt-\frac{1}{6}\int\frac{2t-1+1}{t^2-t+1}dt=$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+t|+\frac{4-1}{6}\int\frac{1}{t^2-t+1}dt-\frac{1}{6}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt=$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+t|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dt=$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+t|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right)+\int\frac{1}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt=$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+t|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{2t-1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

Dove $t=\sqrt[3]{x+1}$

26. Calcolare il seguente integrale indefinito $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ $(x>0)$.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx$$

Si pone $x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

Pongo $\begin{array}{l} t = \cosh x \\ dt = senhxdx \end{array}$

$$-\int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} senhxdx = -\int \frac{senhx}{senhx}dx = -x + c = -\ln\left(t - \sqrt{t^2-1}\right) + c = -\ln\left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) + c$$

27. Sia $f(x) = o[g(x)]$ e $g(x) = o[h(x)]$ per x che tende a x_0. Determinare, dimostrandolo, se la seguente affermazione è vera o falsa: $f(x) = o[g(x)\, h(x)]$ per x che tende a x_0.

L'affermazione è falsa. Infatti basta prendere come controesempio tali funzioni: $f(x) = (x - x_0)^i$, $g(x) = (x - x_0)^j$ e $h(x) = (x - x_0)^k$ dove gli esponenti *i, j* e *k* sono tali da soddisfare le ipotesi ma non l'affermazione. Quindi dovrà essere $i > j > k$, affinché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$, ed inoltre $i \le j + k$ affinché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)h(x)} \ne 0$. Allora basta prendere, per esempio, $i = 1$, $j = 2/3$ e $k = 1/3$.