La stesura di queste dispense
vanta il contributo dei miei carissimi amici
Giulia 5, Matteo 2 e Francesco 3
che ringrazio.

FUNZIONI A PIU' VARIABILI

Dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ del piano $\mathbb{R}^2$, si definisce distanza tra *A* e *B* il numero reale non negativo $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. La definizione si può estendere nello spazio $\mathbb{R}^3$ o, in generale, nello spazio astratto $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente: dati due punti di $\mathbb{R}^n$ $A(a_1, \dots, a_n)$ e $B(b_1, \dots, b_n)$ si definisce distanza tra *A* e *B* il numero reale non negativo $d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$.

La definizione di distanza ci consente di estendere al caso *n*-dimensionale (*n* > 1) tutti i concetti introdotti in $\mathbb{R}$. La prima generalizzazione importante è quella di intorno sferico di raggio $\delta > 0$ di un punto $A(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, che nel caso unidimensionale consisteva nell'intervallo aperto $(a_1 - \delta, a_1 + \delta)$.

Definizione 1: Si dice intorno sferico di raggio $\delta > 0$ e di centro $A(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, il sottoinsieme $B_\delta(A) = \{P \in \mathbb{R}^n \,/\, d(A,P) < \delta\}$.
In particolare se *n* = 2 il sottoinsieme $B_\delta(A)$ rappresenta un cerchio (privato della circonferenza) centrato in *A* di raggio $\delta > 0$, mentre se *n* = 3 rappresenta una sfera (privata della sua superficie) centrata in *A* di raggio $\delta > 0$.

Sia *E* un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ($E \subseteq \mathbb{R}^n$);

Definizione 2: Un punto $A(a_1, \dots, a_n) \in E$ si dice interno di *E* se esiste un intorno sferico $B_\delta(A)$ tale che $B_\delta(A) \subset E$.

Definizione 3: Un punto $A(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si dice esterno di *E* se esiste un intorno sferico $B_\delta(A)$ tale che $B_\delta(A) \subset \mathrm{C}E$ (complementare di *E*).

Definizione 4: Un punto $A(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si dice di frontiera di *E* se non è né interno né esterno.

Per l'insieme dei punti interni di *E* si usa la notazione $\overset{\circ}{E}$, mentre per l'insieme dei punti di frontiera di *E* si usa la notazione ∂E.

Definizione 5: Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se tutti i suoi punti sono interni.

Definizione 6: Un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare $\mathbb{R}^n - E$ è aperto.

FUNZIONI

Le funzioni reali di una variabile reale, studiate ad analisi matematica 1, possono essere generalizzate

i) sia aumentando solo la dimensione dell'insieme in cui varia la variabile indipendente,

ii) sia aumentando solo la dimensione dell'insieme in cui varia la variabile dipendente,

iii) aumentando la dimensione dell'insieme in cui varia sia la variabile indipendente che quella dipendente.

Vediamo i tre casi.

----

i) Se si aumenta solo la dimensione dell'insieme in cui varia la variabile indipendente, allora si ha una *funzione reale a più variabili reali*

$$\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ P(x_1,\dots,x_n) &\mapsto f(P) = f(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

Per esempio $z = f(x,y) = 2x^2 + 2xy - y - 5$.

----

ii) Se si aumenta solo la dimensione dell'insieme in cui varia la variabile dipendente, allora si ha una *funzione vettoriale di una variabile reale*

$$\begin{aligned} \vec{r}: D \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \vec{r}(t) = \left(f_1(t),\dots,f_n(t)\right) \end{aligned}$$

Le funzioni $f_i(t)$ si dicono componenti della funzione $\vec{r}$. Ad ogni numero reale *t* la funzione $\vec{r}$ associa un punto dello spazio $\mathbb{R}^n$ di coordinate $\left(f_1(t),\dots,f_n(t)\right)$.

Per esempio $\vec{r}(t) = \left(2t+1, t^2+t-2\right)$.

----

iii) Se si aumenta la dimensione dell'insieme in cui varia sia la variabile indipendente sia quella dipendente, allora si ha una *funzione vettoriale a più variabili reali*

$$\begin{aligned} \vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_m) &\mapsto \vec{F}(x_1,\dots,x_m) = \left(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\right) \end{aligned}.$$

Le funzioni reali a più variabili reali $f_i(x_1,\dots,x_m)$ si dicono componenti della funzione $\vec{F}$. Ad ogni punto $(x_1,\dots,x_m)$ la funzione $\vec{F}$ associa un punto dello spazio $\mathbb{R}^n$ di coordinate $\left(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\right)$.

Per esempio $\vec{F}(x,y,z) = \left(2x+z, x^2+y-2z\right)$.

Consideriamo le funzioni reali di più variabili reali $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Occorre, per ciascuna componente della variabile indipendente $(x_1,\ldots,x_n)$, considerare un opportuno vincolo affinché la funzione abbia senso. L'insieme dei punti $P(x_1,\ldots,x_n)$ per i quali la *f* ha senso rappresenta il dominio della funzione *f*.

Esempio 1. Trovare il dominio della funzione $z = f(x,y) = 2x^2 + 2xy - y - 5$.
Il dominio è l'insieme $D = \mathbb{R}^2$ non essendo necessario vincolare nessuna componente del generico punto (x,y).

Esempio 2. Trovare il dominio della funzione $z = f(x,y) = \sqrt{2x + y - 5}$.
Il dominio è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y - 5 \geq 0\}$. Per disegnare *D* consideriamo la retta *r* di eq. $2x + y - 5 = 0$ i cui punti fanno ovviamente parte di *D*. Essa divide il piano in due semipiani, solo uno dei quali è l'insieme dei punti (x,y) tali che $2x + y - 5 > 0$. Per capire qual'é tra i due si considera un punto rappresentante non appartenente alla retta *r* e si verifica se esso soddisfa o meno la relazione $2x + y - 5 > 0$. Prendiamo per esempio come punto rappresentante l'origine $O(0,0)$. Siccome *O* non soddisfa la relazione $2x + y - 5 > 0$, saranno punti di *D* tutti quelli del semipiano complementare a quello contenente *O*.

Esempio 3. Trovare il dominio della funzione $z = f(x,y) = \dfrac{2x + y}{x^2 + y^2}$.
Il dominio è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Esempio 4. Trovare il dominio della funzione $z = f(x,y) = \sqrt{3x - 2y + 1}$.
Il dominio è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y + 1 \geq 0\}$. Graficamente esso è composto da tutti i punti della retta *r* di eq. $3x - 2y + 1 = 0$ e da tutti i punti del semipiano individuato dalla retta contenente l'origine $O(0,0)$ in quanto le coordinate di quest'ultimo soddisfano la relazione $3x - 2y + 1 > 0$.

Esempio 5. Trovare il dominio della funzione $z = f(x,y) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11}}{\ln(2x - y)}$.
Le condizioni da imporre alle variabili *x* ed *y* sono tre:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 \geq 0 \\ \ln(2x - y) \neq 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è il sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ delle soluzioni del sistema.
La prima disequazione si può scrivere $(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 16$ ed è soddisfatta da tutti i punti della circonferenza di centro $(1,2)$ e raggio 4 e da tutti i punti esterni ad essa;
La seconda disuguaglianza si può scrivere $2x - y \neq 1$ e quindi il dominio non deve contenere nessun punto della retta di eq. $2x - y = 1$;

La terza disequazione si può scrivere $2x - y > 0$ ed è soddisfatta da tutti i punti del semipiano individuato dalla retta $2x - y = 0$ contenente il punto $(1,1)$ in quanto le coordinate di quest'ultimo soddisfano la relazione $2x - y > 0$.

Esempio 6. Trovare il dominio della funzione $z = f(x,y) = \dfrac{\arcsin(2x+y)}{\sqrt{5-2x-3y}}$.

Le condizioni da imporre alle variabili x ed y sono tre:

$$\begin{cases} 2x + y \geq -1 \\ 2x + y \leq 1 \\ 5 - 2x - 3y > 0 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è il sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ delle soluzioni del sistema.
La prima disequazione si può scrivere $2x + y + 1 \geq 0$ ed è soddisfatta da tutti i punti della retta di eq. $2x + y + 1 = 0$ e dai punti del semipiano individuato da tale retta e contenente l'origine in quanto le sue coordinate soddisfano la relazione $2x + y + 1 > 0$;
La seconda disequazione si può scrivere $2x + y - 1 \leq 0$ ed è soddisfatta da tutti i punti della retta di eq. $2x + y - 1 = 0$ e dai punti del semipiano individuato da tale retta e contenente l'origine in quanto le sue coordinate soddisfano la relazione $2x + y - 1 < 0$;
La terza disequazione è soddisfatta da tutti i punti del semipiano individuato dalla retta $5 - 2x + 3y = 0$ contenente l'origine in quanto le sue coordinate soddisfano la relazione $5 - 2x + 3y > 0$.

LIMITI E DERIVATE PARZIALI DI FUNZIONI A PIU' VARIABILI

Generalizziamo il concetto di limite nel caso di funzioni reali di più variabili. Sia $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ definita nell'intorno sferico bucato $B_\delta(P_0) - \{P_0\}$ del punto $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Definizione 1: Si dice che la funzione f converge ad un numero reale L per $P \to P_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall P \in B_{\delta_\varepsilon}(P_0) - \{P_0\} \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon .$$

Esempio 1. Dimostriamo che il limite per $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ non esiste.

Dal teorema di unicità del limite (che vale anche per funzioni reali di più variabili reali) se verifico che, facendo tendere il punto variabile (x, y) a $(0,0)$ secondo curve diverse, si ottengono limiti diversi, allora la funzione è irregolare per $(x, y) \to (0,0)$. Consideriamo allora il fascio di rette $y = mx$ passanti per l'origine. Se faccio tendere $(x, y) \to (0,0)$ secondo una di tali rette la funzione si esprimerà nel seguente modo

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Cioè *f* può essere considerata come funzione della sola variabile *x*. Ora facciamo tendere (x, y) a $(0,0)$ secondo le rette di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$ e -2 rispettivamente. Si ottiene

nel I caso $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5},$$

nel II caso $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{1+4} = -\frac{2}{5}.$$

Ciò basta per asserire l'irregolarità della funzione *f* per $(x, y) \to (0,0)$.

Purtroppo la tecnica utilizzata nell'esempio 1 non sempre funziona. Può infatti succedere di ottenere sempre lo stesso limite facendo tendere (x, y) a (x_0, y_0) secondo tutte le direzioni (rette passanti per (x_0, y_0)) ma avere un limite diverso secondo una curva passante per (x_0, y_0), come nel caso $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Esempio 2. Dimostrare che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Dalla isuguaglianza

$$x^2 y^2 \le 2x^2 y^2 \le 2x^2 y^2 + x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2,$$

valida $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, segue

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \le \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Quindi, è chiaro che la relazione $-\varepsilon < \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon$ è soddisfatta da tutti i punti $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$.

Esempio 3. Dimostrare che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$ non esiste.

Consideriamo il fascio di rette $y = mx$ passanti per l'origine. Se faccio tendere $(x, y) \to (0,0)$ secondo una di tali rette la funzione si esprimerà nel seguente modo

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{(2m^2 + 5m^2)x^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{7m^2}{1 + m^2}$$

Ora facciamo tendere (x, y) a $(0,0)$ secondo le rette di coefficiente angolare 0 e 1 rispettivamente. Si ottiene

nel I caso $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} = 0$,

nel II caso $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} = \frac{7}{8}$.

Ciò basta per asserire l'irregolarità della funzione f per $(x, y) \to (0,0)$.

Dall'estensione del concetto di funzione reale a più variabili convergente segue quella di funzione reale a più variabili continua.

Definizione 2: Si dice che la funzione $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ definita nell'intorno sferico $B_\delta(P_0)$ del punto $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ è continua in $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ se $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

DERIVATA PARZIALE

Sia f una funzione $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ definita nell'intorno sferico $B_\delta(P_0)$ del punto $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Consideriamo un incremento h della sola componete x_i^0 del punto P_0 mantenendo constanti le altre. Si definisce in tal modo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h}.$$

Il rapporto incrementale è una funzione reale di una sola variabile reale h. Se il limite per $h \to 0$ di tale funzione esiste finito, diremo che la funzione f è parzialmente derivabile rispetto alla variabile x_i e chiameremo derivata parziale rispetto a x_i il suo limite, cioè

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0).$$

Quindi quando si considera una funzione reale di più variabili reali, per lo studio della sua derivabilità parziale rispetto x_i ci si rifà alla teoria della derivabilità di una funzione reale di una variabile reale, considerando la funzione nella sola variabile x_i mentre tutte le altre componenti vengono considerate costanti. Di conseguenza anche tutte le regole di derivazione si ereditano dalla teoria delle derivate di una funzione reale di una variabile reale.

Esempio 4. Derivare parzialmente rispetto alle sue variabili la funzione $f(x,y)=2x^3+5x^2y+3xy^4-2y^3$.

La funzione considerata nella sola variabile *x*, interpretando cioè *y* come costante, è un polinomio di 3 grado e quindi derivabile parzialmente rispetto a *x* per ogni *x* reale. Dalle regole di derivazione si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6x^2+10xy+3y^4 \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Analogamente si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5x^2+12xy^3-6y^2 \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esempio 5. Determinare il dominio della funzione $f(x,y)=2x\ln\left(x+2y^2+1\right)+3y^2$ e derivare parzialmente rispetto alle sue variabili.

La condizione da imporre per determinare il dominio è $x+2y^2+1>0$, cioè $x>-2y^2-1$. Per determinare la regione del piano individuata dalla disequazione consideriamo il luogo dei punti del piano che soddisfano l'equazione $x=-2y^2-1$. Esso è una parabola avente l'asse delle ascisse come asse di simmetria, con il vertice nel punto di coordinate $(-1,0)$ e la concavità rivolta verso sinistra. La parabola divide il piano in due zone: quella interna ad essa e quella esterna. L'origine, che appartiene alla zona esterna alla parabola, soddisfa la disequazione $x>-2y^2-1$ (infatti si ha $0>-1$), quindi la disequazione è soddisfatta da tutti in punti che si trovano dalla stessa parte in cui si trova l'origine, cioè la parte esterna. Il dominio di *f* è un insieme aperto. La funzione è parzialmente derivabile rispetto alle sue variabili in tutto il suo dominio e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\ln\left(x+2y^2+1\right)+\frac{2x}{x+2y^2+1} \qquad \forall(x,y)\in D_f.$$

Analogamente si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{8xy}{x+2y^2+1}+6y \qquad \forall(x,y)\in D_f.$$

Supponiamo che una funzione *f* delle *n* variabili $x_1, ..., x_n$ sia parzialmente derivabile rispetto alla variabile x_k in tutti i punti di un aperto $A\subseteq\mathbf{R}^n$; essendo anche $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ funzione di $x_1, ..., x_n$, può darsi che essa sia a sua volta derivabile parzialmente rispetto ad una variabile x_j in un punto $P\in A$ oppure anche in un sottoinsieme di *A* o in tutto *A*. Possiamo allora definire la *derivata parziale seconda* della funzione *f*, fatta prima rispetto ad x_k e poi rispetto ad x_j, che indicheremo ad esempio con il simbolo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(P)$, se è calcolata nel punto *P*. Si osservi bene il simbolo utilizzato, in quanto, come vedremo, l'ordine in cui le derivazioni vengono effettuate in generale non è indifferente: il simbolo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}$ va interpretato come $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$, il che presuppone l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in tutto un aperto. Per indicare questa derivata parziale seconda si usano anche i simboli $f_{x_k x_j}$ e $D^{k,j}f$ (si noti che questa volta l'ordine di derivazione coincide con l'ordine in cui sono scritti gli indici).

Perciò, se ad esempio una funzione $f(x , y)$ è derivabile parzialmente sia rispetto ad x che rispetto ad y in tutto un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$, e se tutte le derivate ottenute di volta in volta esistono in A e sono a loro volta parzialmente derivabili, abbiamo:

2 derivate parziali prime: f_x ed f_y;
4 derivate parziali seconde: f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} ed f_{yy};
8 derivate parziali terze: $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{yxy}, f_{yyx}$ ed f_{yyy},

e così via. Ad esempio, sia $f(x , y) = x^2 \operatorname{sen} xy + y^3$, definita e continua in tutto $\mathbf{R}^2$; le derivate parziali fino al terzo ordine sono:

$f_x(x , y) = 2x \operatorname{sen} xy + x^2y \cos xy$;
$f_y(x , y) = x^3 \cos xy + 3y^2$;

$f_{xx}(x , y) = 2 \operatorname{sen} xy + 4xy \cos xy - x^2y^2 \operatorname{sen} xy$;
$f_{xy}(x , y) = 3x^2 \cos xy - x^3y \operatorname{sen} xy$;
$f_{yx}(x , y) = 3x^2 \cos xy - x^3y \operatorname{sen} xy$;
$f_{yy}(x , y) = -x^4 \operatorname{sen} xy + 6y$;

$f_{xxx}(x , y) = 6y \cos xy - 6xy^2 \operatorname{sen} xy - x^2y^3 \cos xy$;
$f_{xxy}(x , y) = 6x \cos xy - 6x^2y \operatorname{sen} xy - x^3y^2 \cos xy$;
$f_{xyx}(x , y) = 6x \cos xy - 6x^2y \operatorname{sen} xy - x^3y^2 \cos xy$;
$f_{xyy}(x , y) = -4x^3 \operatorname{sen} xy - x^4y \cos xy$;
$f_{yxx}(x , y) = 6x \cos xy - 6x^2y \operatorname{sen} xy - x^3y^2 \cos xy$;
$f_{yxy}(x , y) = -4x^3 \operatorname{sen} xy - x^4y \cos xy$;
$f_{yyx}(x , y) = -4x^3 \operatorname{sen} xy - x^4y \cos xy$;
$f_{yyy}(x , y) = -x^5 \cos xy + 6$.

Il precedente esempio suggerisce che alcune derivate parziali miste dello stesso ordine in realtà coincidano: ad esempio, si ha $f_{xy}(x , y) = f_{yx}(x , y)$ per ogni $(x , y) \in \mathbf{R}^2$; analogamente, si ha $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ ed anche $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ in tutto $\mathbf{R}^2$. Possiamo chiederci se in generale per una funzione $f(x , y)$ la derivata parziale di ordine m rispetto alle variabili $x_1, ..., x_m$ (dove x_i coincide con x oppure con y) sia indipendente dall'ordine in cui vengono effettuate le derivazioni. Il prossimo teorema dà una risposta a questo problema.

TEOREMA 31 (teorema di Schwarz). *Sia $f(x , y)$ definita in un intorno I del punto $P_0 = (a , b)$, e supponiamo che le derivate parziali f_{xy} ed f_{yx} esistano in tutto I (il che implica anche l'esistenza delle derivate parziali prime f_x ed f_y in tutto I). Se f_{xy} ed f_{yx} sono entrambe continue in P_0, allora esse coincidono in tale punto.*

Esempio 6. Verificare il teorema di Schwarz per la funzione $f(x,y) = 2x^3y^2 + 5x^2y - 2x^3 + y^5$ in tutto $\mathbf{R}^2$

Si ha $f_x(x,y) = 6x^2y^2 + 10xy - 6x^2$ e $f_y(x,y) = 4x^3y + 5x^2 + 5y^4 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le derivate parziali seconde miste $f_{xy}(x,y) = 12x^2y + 10x$ e $f_{yx}(x,y) = 12x^2y + 10x$ coincidono in tutto $\mathbb{R}^2$ dal momento che sono ivi continue.

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Diamo in primo luogo la definizione di massimo e di minimo relativo per una funzione di n variabili, anche se poi vedremo un procedimento per individuare tali estremi relativi nel caso $n = 2$.

DEFINIZIONE DI PUNTO DI MASSIMO (DI MINIMO) RELATIVO PER UNA FUNZIONE DI n VARIABILI. *Sia f una funzione di n variabili e sia* $D_f \subseteq R^n$ *il suo dominio. Un punto* $P_0 \in D_f$ *si dice punto di massimo (di minimo) relativo per la funzione f se esiste un intorno sferico* $B_\delta(P_0)$ *tale che* $\forall P \in B_\delta(P_0) \cap D_f$ *risulti* $f(P) \le f(P_0)$ *(ovvero* $f(P) \ge f(P_0)$*).*

Il seguente teorema fornisce una generalizzazione del noto teorema di Fermat per le funzioni di più variabili.

TEOREMA 23 (teorema di Fermat per le funzioni di più variabili). *Sia f definita in* $D_f \subseteq R^n$*, e sia* P_0 *un punto di massimo o di minimo relativo di f* *<u>interno</u>* *di* D_f*. Se esistono le derivate parziali di f in* P_0*, allora esse si annullano tutte in* P_0*.*

Definizione. Se f ammette in un punto P derivate parziali rispetto a tutte le variabili, è possibile associare al punto P un vettore, le cui componenti sono $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)$. Tale vettore viene detto **gradiente** della funzione f in P, e viene indicato con il simbolo $\nabla f(P)$, oppure grad $f(P)$. Nel caso che le derivate parziali siano definite in tutti i punti P di un aperto A, possiamo associare ad ogni punto di A il gradiente di f in quel punto, ottenendo così un *campo vettoriale*, precisamente una funzione definita in A, che al punto P (che ha n coordinate) associa un vettore $\nabla f(P)$ (che ha n componenti).

Quindi, dal teorema di Fermat, abbiamo che in un punto P_0 di massimo o minimo relativo interno al dominio di una funzione in cui esistono tutte le derivate parziali, si ha necessariamente $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

Perciò possiamo affermare che per la ricerca dei punti di estremo relativi di una funzione f interni di D_f e in cui esistono le derivate parziali rispetto a tutte le variabili, la prima operazione da fare è la risoluzione dell'equazione $\nabla f(P) = \mathbf{0}$, cioè del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0. \end{cases}$$

Gli eventuali estremi relativi di f, che sono interni al dominio, vanno quindi cercati tra i punti P che soddisfano tale sistema. Questi vengono detti **punti stazionari** della funzione f.

Si ha qui un'analogia geometrica con il caso delle funzioni di una variabile: infatti sappiamo che in un punto di estremo relativo c della funzione f di una variabile, che sia interno al dominio di f, si ha $f'(c) = 0$.

Come nel caso di funzioni di una sola variabile, la condizione $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$ è necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo. In altre parole il fatto che un punto sia stazionario non implica l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo in tale punto. Si può avere infatti una ulteriore possibilità, che in qualche modo rappresenta l'estensione a più dimensioni del concetto di "punto di flesso". In precedenza abbiamo dato le definizioni di massimo e di minimo relativo, precisando che in un intorno di P_0 la funzione deve avere valori rispettivamente minori o maggiori del valore assunto in P_0. Diamo ora la seguente definizione:

DEFINIZIONE DI PUNTO DI SELLA PER UNA FUNZIONE DI n VARIABILI. *Sia P_0 un punto stazionario interno al dominio $D_f \subseteq R^n$ di una funzione f; il punto P_0 viene detto* ***punto di sella*** *per f se considerato un qualunque intorno sferico di P_0 vi sono in $B_\delta\left(P_0\right) \cap D_f$ punti P per i quali è $f(P) < f(P_0)$ e punti Q per i quali è $f(Q) > f(P_0)$.*

Il motivo della denominazione "punto di sella" deriva dalle particolari caratteristiche geometriche della superficie grafico di f nel caso di una funzione di due variabili: in un punto di sella il piano tangente alla superficie è sempre orizzontale (essendo esso per definizione un punto stazionario); tuttavia, mentre nel caso di un estremo relativo la superficie giace al di sopra o al di sotto del piano tangente (almeno per P variabile in un intorno di P_0 sufficientemente piccolo), nel caso del punto di sella la superficie si trova sempre in parte al di sopra ed in parte al di sotto del piano tangente, e ciò accade in qualunque intorno di P_0, per quanto piccolo. Un caso molto semplice di funzione che presenta un punto di sella è $f(x , y) = xy$, il cui grafico è un paraboloide iperbolico (detto appunto *paraboloide a sella*).

Forniamo ora una tecnica per stabilire se un punto stazionario interno ad dominio di f sia o meno un punto di estremo relativo per f. Per semplicità ci limitiamo a dare un procedimento concreto nel caso di due sole variabili.

Data una funzione $f(x , y)$ che ammette derivate seconde continue in un aperto A, definiamo per ogni (x , y) di A la seguente matrice:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{12.4}$$

che viene detta ***matrice hessiana*** della funzione f nel punto (x , y). Indichiamo inoltre con $|H(x , y)|$ il determinante della (12.4), che chiameremo ***determinante hessiano***. Si osservi che, grazie al teorema di Schwarz, nelle ipotesi fatte la matrice hessiana è simmetrica (cioè $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$).

TEOREMA 25. *Sia f una funzione che ammette derivate seconde continue in un intorno A del punto stazionario $P_0 = (x_0 , y_0)$. Si ha allora:*

1) Se $| H(x_0 , y_0)| > 0$ e $f_{xx}(x_0 , y_0) > 0$, allora P_0 è un punto di minimo relativo per f;
2) Se $| H(x_0 , y_0)| > 0$ e $f_{xx}(x_0 , y_0) < 0$, allora P_0 è un punto di massimo relativo per f;
3) Se $| H(x_0 , y_0)| < 0$ allora P_0 è un punto di sella per f.

Questo teorema fornisce alcune condizioni sufficienti per la determinazione della natura di un punto stazionario di f che sia interno al dominio di f, ma vi è un caso in cui esso non può dare risposta, precisamente quando $|H(x_0 , y_0)|$ è nullo. In questo caso è necessario procedere con altri metodi per determinare la natura di P_0.

ESEMPIO12.1. Determinare i massimi e minimi relativi di $f(x,y) = 2x^2 + 5xy - 3y^2 + x$ in $\mathbf{R}^2$.

Ricordiamo che la tecnica su descritta funziona solo relativamente ai puti interni. Tuttavia in questo caso la funzione è definita in $\mathbf{R}^2$ i cui punti sono tutti interni. La funzione è parzialmente derivabile rispetto ad entrambe le variabili infinite volte su tutto $\mathbf{R}^2$. Troviamo allora tutti i suoi punti stazionari. Si ha

$$\begin{cases} f_x\left(x,y\right) = 4x + 5y + 1 = 0 \\ f_y\left(x,y\right) = 5x - 6y = 0 \end{cases}$$

Sistema che ammette come unica soluzione il punto $P\left(-\dfrac{6}{49}, -\dfrac{5}{49}\right)$. Calcoliamo ora la matrice hessiana

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Si ha $\left|H\left(-\frac{6}{49},-\frac{5}{49}\right)\right|=-49$. Quindi il punto $P\left(-\frac{6}{49},-\frac{5}{49}\right)$ è un punto di sella. Non ci sono né massimi né minimi relativi.

ESEMPIO12.2. (Caso del quadrato o rettangolo)

Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y)=x^2+2y^2$ nel rettangolo $R=[-2,1]\times[-2,3]\subset$ **R**^{2}.

L'esistenza del massimo e minimo assoluti nel rettangolo è garantita dalla continuità della funzione e dal fatto che un il rettangolo *R* è un insieme chiuso e limitato. La ricerca del massimo e minimo assoluti va fatta determinando tutti i massimi e minimi relativi di *f* nei punti interni al rettangolo *R*, poi nei punti di frontiera del rettangolo *R* e infine nei vertici del rettangolo *R*. La funzione è parzialmente derivabile rispetto ad entrambe le variabili infinite volte su tutto **R**^{2}.

Cominciamo col determinare allora tutti i suoi punti stazionari interni al rettangolo *R*. Si ha $f_x(x,y)=2x$ e $f_y(x,y)=4y$.

Quindi dal sistema

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 4y=0 \end{cases}$$

otteniamo come unica soluzione il punto $O(0,0)$ che è quindi l'unico punto stazionario di *f* interno al rettangolo *R*. Calcoliamo ora la matrice hessiana

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si ha $|H(0,0)|=8$ e $f_{xx}(0,0)=2$, quindi il punto $O(0,0)$ è un punto di minimo relativo di *f*. In tale punto la funzione vale $f(0,0)=0$.

Andiamo ora alla ricerca di eventuali punti di estremo relativo sulla frontiera del dominio che è rappresentata dai quattro lati del rettangolo di vertici $A(-2,-2)$, $B(-2,3)$, $C(1,3)$, $D(1,-2)$.

Cominciamo prima la ricerca sul lato *AB*. Esso si parametrizza nel modo seguente

$$AB:\begin{cases} x=-2 \\ y=t \end{cases} \qquad t\in[-2,3].$$

Quindi la funzione *f* , considerata sul lato *AB*, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-2,3]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(-2,t)=4+2t^2$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-2,3)$. Si ha $\varphi'(t)=4t=0$ per $t=0$. Poiché $\varphi'(t)<0$ in $(-2,0)$ e $\varphi'(t)>0$ in $(0,3)$, allora il punto $t=0$, a cui corrisponde il punto $P_1(-2,0)$, è di minimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tale punto la funzione vale $\varphi(0)=f(-2,0)=4$. Agli estremi dell'intervallo $[-2,3]$, la funzione vale $\varphi(-2)=f(-2,-2)=12$ e $\varphi(3)=f(-2,3)=22$.

Bisogna fare attenzione al fatto che il punto $P_1(-2,0)$ rappresenta un punto di minino relativo solo per la curva dello spazio che si ottiene dall'intersezione del grafico della *f* con il piano di equazione $x=-2$ (che è un particolare piano passante per il punto $P_1(-2,0)$ e perpendicolare al piano coordinato *x, y*). Infatti esso potrebbe essere un punto di massimo relativo della curva ottenuta dall'intersezione tra il grafico di *f* e un altro piano passante per il punto $P_1(-2,0)$ e perpendicolare al piano coordinato *x, y*.

In modo analogo cerchiamo gli eventuali punti di estremo relativo sul lato BC. Esso si parametrizza nel modo seguente

$$BC:\begin{cases} y=3 \\ x=t \end{cases} \quad t\in[-2,1].$$

Quindi la funzione f, considerata sul lato BC, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-2,1]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(t,3)=t^2+18$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-2,1)$. Si ha $\varphi'(t)=2t=0$ per $t=0$. Poiché $\varphi'(t)<0$ in $(-2,0)$ e $\varphi'(t)>0$ in $(0,1)$, allora il punto $t=0$, a cui corrisponde il punto $P_2(0,3)$, è di minimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tale punto la funzione vale $\varphi(0)=f(0,3)=18$. Agli estremi dell'intervallo $[-2,1]$, la funzione vale $\varphi(-2)=f(-2,3)=22$ e $\varphi(1)=f(1,3)=19$.

Cerchiamo gli eventuali punti di estremo relativo sul lato CD. Esso si parametrizza nel modo seguente

$$CD:\begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[-2,3].$$

Quindi la funzione f, considerata sul lato CD, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-2,3]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(1,t)=1+2t^2$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-2,3)$. Si ha $\varphi'(t)=4t=0$ per $t=0$. Poiché $\varphi'(t)<0$ in $(-2,0)$ e $\varphi'(t)>0$ in $(0,3)$, allora il punto $t=0$, a cui corrisponde il punto $P_3(1,0)$, è di minimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tale punto la funzione vale $\varphi(0)=f(1,0)=1$. Agli estremi dell'intervallo $[-2,3]$, la funzione vale $\varphi(-2)=f(1,-2)=9$ e $\varphi(3)=f(1,3)=19$.

Infine, cerchiamo i punti di estremo relativo sul lato AD. Esso si parametrizza nel modo seguente

$$AD:\begin{cases} y=-2 \\ x=t \end{cases} \quad t\in[-2,1].$$

Quindi la funzione f, considerata sul lato AD, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-2,1]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(t,-2)=t^2+8$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-2,1)$. Si ha $\varphi'(t)=2t=0$ per $t=0$. Poiché $\varphi'(t)<0$ in $(-2,0)$ e $\varphi'(t)>0$ in $(0,1)$, allora il punto $t=0$, a cui corrisponde il punto $P_4(0,-2)$, è di minimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tale punto la funzione vale $\varphi(0)=f(0,-2)=8$. Agli estremi dell'intervallo $[-2,1]$, la funzione vale $\varphi(-2)=f(-2,-2)=12$ e $\varphi(1)=f(-2,1)=9$.

P	e. rel.	F(P)
$(0,0)$	min	0
$(-2,0)$		4
$(-2,-2)$		12
$(-2,3)$		22
$(0,3)$		18
$(1,3)$		19

$(1,0)$		1
$(1,-2)$		9
$(0,-2)$		8

In conclusione, confrontando i valori ottenuti dalla funzione nei vari punti di estremo relativi, si può stabilire che il massimo assoluto della funzione nel dominio è M = 22, ottenuto nel punto di massimo assoluto $P_M(-2,3)$, mentre il minimo assoluto della funzione nel dominio è m = 0, ottenuto nel punto di minimo assoluto $P_m(0,0)$.

ESEMPIO12.3. (Caso del triangolo)

Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y)=x^2y+2x^2+2y^2-2x+3y$ nel triangolo T che ha i vertici nei punti $A(-6,-4)$, $B(2,4)$, $C(2,-4)$.

Determiniamo tutti i suoi punti stazionari interni al triangolo T. Si ha $f_x(x,y)=2xy+4x-2$ e $f_y(x,y)=x^2+4y+3$.

Quindi dal sistema

$$\begin{cases} xy+2x-1=0 \\ x^2+4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left(-\dfrac{x^2+3}{4}\right)+2x-1=0 \\ y=-\dfrac{x^2+3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^3+5x-4=0 \\ y=-\dfrac{x^2+3}{4} \end{cases}$$

Il polinomio della prima equazione si può fattorizzare così $-x^3+5x-4=(x-1)(-x^2-x+4)$. Quindi la prima equazione è soddisfatta per $x=1$, $x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ e $x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Per $x=1$, dalla seconda equazione si ottiene $y=-1$ e quindi il punto stazionario $P_1(1,-1)$;

Per $x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, dalla seconda equazione si ottiene $y=\dfrac{-15-\sqrt{17}}{8}$ e quindi il punto stazionario $P_2\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2},\dfrac{-15-\sqrt{17}}{8}\right)$;

Per $x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$, dalla seconda equazione si ottiene $y=\dfrac{-15+\sqrt{17}}{8}$ e quindi il punto stazionario $P_3\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2},\dfrac{-15+\sqrt{17}}{8}\right)$.

Da un controllo numerico risulta che tutte e tre i punti stazionari sono interni al triangolo. Andiamo a calcolare su ciascuno di essi il determinante hessiano.

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y+4 & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

Nel punto $P_1(1,-1)$ si ha $|H(1,-1)|=4$ e $f_{xx}(1,-1)=2$, quindi esso è un punto di minimo relativo di f. In tale punto la funzione vale $f(1,-1)=-2$.

Nel punto $P_2\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\frac{-15-\sqrt{17}}{8}\right)$ si ha $\left|H\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\frac{-15-\sqrt{17}}{8}\right)\right|=-17-3\sqrt{17}<0$, quindi esso è un punto di sella.

Nel punto $P_3\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\frac{-15+\sqrt{17}}{8}\right)$ si ha $\left|H\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\frac{-15+\sqrt{17}}{8}\right)\right|=-17+3\sqrt{17}<0$, quindi esso è un punto di sella.

Andiamo ora alla ricerca di eventuali punti di estremo relativo sulla frontiera del dominio che è rappresentata dai tre lati del triangolo di vertici $A(-6,-4)$, $B(2,4)$, $C(2,-4)$.

Cominciamo prima la ricerca sul lato *AB*. L'eq. della retta passante per i punti $A(-6,-4)$ e $B(2,4)$ è $y=x+2$ e si parametrizza nel modo seguente

$$AB:\begin{cases} x=t \\ y=t+2 \end{cases} \qquad t\in[-6,2].$$

Quindi la funzione f, considerata sul lato *AB*, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-6,2]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(t,t+2)=t^2(t+2)+2t^2+2(t+2)^2-2t+3(t+2)=t^3+6t^2+9t+14$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-6,2)$. Si ha $\varphi'(t)=3t^2+12t+9=0$ per $t=-3$ e per $t=-1$. Poiché $\varphi'(t)<0$ in $(-3,-1)$ e $\varphi'(t)>0$ in $(-6,-3)\cup(-1,2)$, allora il punto $t=-3$, a cui corrisponde il punto $P_4(-3,-1)$, è di massimo relativo per la funzione $\varphi(t)$ e il punto $t=-1$, a cui corrisponde il punto $P_5(-1,1)$, è di minimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tali punti la funzione vale $\varphi(-3)=f(-3,-1)=14$ e $\varphi(-1)=f(-1,1)=10$. Agli estremi dell'intervallo $[-6,2]$, la funzione vale $\varphi(-6)=f(-6,-4)=-40$ e $\varphi(2)=f(2,4)=64$.

In modo analogo cerchiamo gli eventuali punti di estremo relativo sul lato BC. Esso si parametrizza nel modo seguente

$$BC:\begin{cases} x=2 \\ y=t \end{cases} \qquad t\in[-4,4].$$

Quindi la funzione f, considerata sul lato BC, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-4,4]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(2,t)=4t+8+2t^2-4+3t=2t^2+7t+4$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-4,4)$. Si ha $\varphi'(t)=4t+7=0$ per $t=-\frac{7}{4}$. Poiché $\varphi'(t)<0$ in $\left(-4,-\frac{7}{4}\right)$ e $\varphi'(t)>0$ in $\left(-\frac{7}{4},4\right)$, allora il punto $t=-\frac{7}{4}$, a cui corrisponde il punto $P_6\left(2,-\frac{7}{4}\right)$, è di minimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tale punto la funzione vale $\varphi\left(-\frac{7}{4}\right)=f\left(2,-\frac{7}{4}\right)=-\frac{17}{8}$. Agli estremi dell'intervallo $[-4,4]$, la funzione vale $\varphi(-4)=f(2,-4)=8$ e $\varphi(4)=f(2,4)=64$.

Infine cerchiamo gli eventuali punti di estremo relativo sul lato AC. Esso si parametrizza nel modo seguente

$$AC:\begin{cases} y=-4 \\ x=t \end{cases} \qquad t\in[-6,2].$$

Quindi la funzione f, considerata sul lato AC, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[-6,2]$ la cui espressione analitica è $\varphi(t)=f(t,-4)=-4t^2+2t^2+32-2t-12=-2t^2-2t+20$. Calcoliamo gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ nell'intervallo aperto $t\in(-6,2)$. Si ha $\varphi'(t)=-4t-2=0$ per $t=-\frac{1}{2}$. Poiché $\varphi'(t)>0$ in $\left(-6,-\frac{1}{2}\right)$ e $\varphi'(t)<0$ in $\left(-\frac{1}{2},2\right)$, allora il punto $t=-\frac{1}{2}$, a cui corrisponde il punto $P_7\left(-\frac{1}{2},-4\right)$, è di massimo relativo per la funzione $\varphi(t)$. In tale punto la funzione vale $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-4\right)=\frac{21}{2}$. Agli estremi dell'intervallo $[-6,2]$, la funzione vale $\varphi(-6)=f(-6,-4)=-40$ e $\varphi(2)=f(2,-4)=8$.

P	e. rel.	F(P)
$(1,-1)$	min	-2
$(-3,-1)$		14
$(-1,1)$		10
$(-6,-4)$		-40
$(2,4)$		64
$\left(2,-\frac{7}{4}\right)$		$-\frac{17}{8}$
$(2,-4)$		8
$\left(-\frac{1}{2},-4\right)$		$\frac{21}{2}$

In conclusione, confrontando i valori ottenuti dalla funzione nei vari punti di estremo relativi, si può stabilire che il massimo assoluto della funzione nel dominio è M = 64, ottenuto nel punto di massimo assoluto $P_M(2,4)$, mentre il minimo assoluto della funzione nel dominio è m = - 40, ottenuto nel punto di minimo assoluto $P_m(-6,-4)$.

ESEMPIO12.3. (Caso del cerchio)

Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y)=4x^4-9x^2y^2+3y^4+x^2+3y^2$ nel cerchio $C=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\le 2\}$.

Determiniamo tutti i punti stazionari interni al cerchio C. Si ha $f_x(x,y)=16x^3-18xy^2+2x$ e $f_y(x,y)=-18x^2y+12y^3+6y$, otteniamo quindi dal sistema

$$\begin{cases} x\left(8x^2-9y^2+1\right)=0 \\ y\left(-3x^2+2y^2+1\right)=0 \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta per $x=0$ oppure per $8x^2-9y^2+1=0$.

Se $x=0$, la seconda equazione diventa $y\left(2y^2+1\right)=0$ che è soddisfatta per $y=0$ oppure per $2y^2+10=0$ (impossibile).

Se $8x^2-9y^2+1=0$, cioè $x^2=\frac{9y^2-1}{8}$, la seconda equazione diventa $y\left(-3\frac{9y^2-1}{8}+2y^2+1\right)=0$ cioè $y\left(-y^2+1\right)=0$ che è soddisfatta per $y=0$ oppure per $y=\pm1$. Per $y=0$ si ha $x^2=-\frac{1}{8}$ (impossibile); per $y=\pm1$ si ha $x^2=1$ cioè $x=\pm1$.

Allora i punti stazionari sono: $P_1(0,0)$, $P_2(-1,-1)$, $P_3(1,-1)$, $P_4(1,1)$, $P_5(-1,1)$. Ma soltanto $P_1(0,0)$ è interno al cerchio, gli altri punti si trovano sulla frontiera.

Calcoliamo ora la matrice hessiana

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 48x^2-18y^2+2 & -36xy \\ -36xy & -18x^2+36y^2+6 \end{pmatrix}$$

Si ha $\left|H(0,0)\right|=12$ e $f_{xx}(0,0)=2$, quindi il punto $O(0,0)$ è un punto di minimo relativo di *f*. In tale punto la funzione vale $f(0,0)=0$.

Troviamo gli eventuali punti di estremo relativo sulla circonferenza (frontiera del cerchio) la cui parametrizzazione è

$$C:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Quindi la funzione f, considerata sulla circonferenza, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[0,2\pi]$ la cui espressione analitica è

$$\varphi(t)=f(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t)=16\cos^4 t-36\cos^2 t\sin^2 t+12\sin^4 t+2\cos^2 t+6\sin^2 t=$$

$$=16\cos^4 t-36\cos^2 t\sin^2 t+12\sin^4 t+2+4\sin^2 t$$

Troviamo gli estremi relativi di $\varphi(t)$ in $(0,2\pi)$.

Si ha $\varphi'(t)=-64\cos^3 t\sin t+72\cos t\sin^3 t-72\cos^3 t\sin t+48\sin^3 t\cos t+8\sin t\cos t=$

$$=-136\cos^3 t\sin t+120\cos t\sin^3 t+8\sin t\cos t=8\cos t\sin t\left(-17\cos^2 t+15\sin^2 t+1\right)=$$

$$=8\cos t\sin t\left(-32\cos^2 t+15\cos^2 t+15\sin^2 t+1\right)=8\cos t\sin t\left(-32\cos^2 t+16\right)=$$

$$=128\cos t\sin t\left(-2\cos^2 t+1\right)=256\cos t\sin t\left(-\cos^2 t+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=256\cos t\sin t\left(-\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Quindi $\varphi'(t)=0$ se $\cos t=0$ oppure $\sin t=0$ oppure $\cos t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Da $\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ oppure $t = \frac{3\pi}{2}$ (che, dal segno di $\varphi'(t)$, sono due punti di massimo relativo) si ha $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 18$. Ai valori $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$ corrispondono i punti della circonferenza $\left(0, \sqrt{2}\right)$ e $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ rispettivamente.

Da $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ oppure $t = \pi$ (che, dal segno di $\varphi'(t)$, sono due punti di massimo relativo) si ha $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 18$. Ai valori $t = 0$ e $t = \pi$ corrispondono i punti della circonferenza $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ rispettivamente.

Da $-2\cos^2 t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$ oppure $t = \frac{7\pi}{4}$ (che, dal segno di $\varphi'(t)$, sono tutti punti di minimo relativo) si ha $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1$. Ai valori $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$ e $t = \frac{7\pi}{4}$ corrispondono i punti della circonferenza $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ e $(1,-1)$ rispettivamente.

P	e. rel.	F(P)
$(0,0)$	min	0
$\left(0, \sqrt{2}\right)$		18
$\left(0, -\sqrt{2}\right)$		18
$\left(\sqrt{2}, 0\right)$		18
$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$		18
$(1,1)$		1
$(-1,1)$		1
$(-1,-1)$		1
$(1,-1)$		1

In conclusione si ha il massimo assoluto 18 nei punti $P_1\left(0, \sqrt{2}\right)$, $P_2\left(0, -\sqrt{2}\right)$, $P_3\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $P_4\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, e il minimo assoluto 0 in $O(0,0)$.

ESEMPIO12.4. (Caso dell'ellisse)

Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^3 + 2y^3$ nel dominio $D = \left\{(x, y) \in R^2 / \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1\right\}$.

D è l'unione di tutti i punti dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ e di tutti i punti del piano interni ad essa.

Determiniamo tutti i punti stazionari interni all'ellisse *D*. Si ha $f_x(x,y)=3x^2$ e $f_y(x,y)=6y^2$, otteniamo quindi dal sistema

$$\begin{cases} 3x^2=0 \\ 6y^2=0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto stazionario interno $O(0,0)$.
Calcoliamo ora la matrice hessiana

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y \end{pmatrix}$$

Si ha $|H(0,0)|=0$; quindi il determinante hessiano non fornisce alcuna indicazione circa la natura del punto stazionario $O(0,0)$. Tuttavia possiamo notare che in tale punto la funzione è nulla, cioè $f(0,0)=0$ e inoltre, per ogni intorno sferico dell'origine, è possibile considerare punti dell'intorno in cui la funzione risulta negativa (tutti i punti dell'intorno che si trovano nel 3 quadrante) e punti dell'intorno in cui la funzione risulta positiva (tutti i punti dell'intorno che si trovano nel 1 quadrante). Quindi il punto $O(0,0)$ è di sella per la funzione.

Troviamo gli eventuali punti di estremo relativo sull'ellisse la cui parametrizzazione è

$$E:\begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$

E è una ellisse centrata nell'origine avente semiasse sulle ascisse lungo 5 e semiasse sulle ordinate lungo 4.

Quindi la funzione *f*, considerata sull'ellisse, diventa una funzione nella sola variabile $t\in[0,2\pi]$ la cui espressione analitica è

$$\varphi(t)=f(5\cos t,4\sin t)=125\cos^3 t+128\sin^3 t.$$

Troviamo gli estremi relativi di $\varphi(t)$ in $(0,2\pi)$.

Si ha $\varphi'(t)=-375\cos^2 t\sin t+384\sin^2 t\cos t=3\cos t\sin t(-125\cos t+128\sin t)$.

Quindi $\varphi'(t)=0$ se $\cos t=0$ oppure $\sin t=0$ oppure $-125\cos t+128\sin t=0$.

Le prime due equazioni ammettono in $(0,2\pi)$ le soluzioni $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\pi$.

L'equazione $-125\cos t+128\sin t=0$ possiamo scriverla in modo equivalente $\tan t=\frac{125}{128}$. Siccome $0<\frac{125}{128}<\frac{\pi}{2}$, allora le soluzioni dell'equazione sono $\alpha=\arctan\left(\frac{125}{128}\right)$ e $\alpha+\pi$. L'intervallo $(0,2\pi)$ si suddivide nei seguenti intervalli $(0,\alpha]\cup\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\cup[\pi,\alpha+\pi]\cup\left[\alpha+\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.
Studiamo il segno di $\varphi'(t)$ in ciascuno di questi intervalli (ANCHE SE CIO' NON SERVIREBBE AI FINI DELL'ESERCIZIO):

- in $(0,\alpha)$ si ha che $\cos t>0$, $\sin t>0$ e il segno di $(-125\cos t+128\sin t)$ equivale a quello di $\left(\frac{-125\cos t+128\sin t}{128\cos t}\right)$ cioè di $\left(\tan t-\frac{125}{128}\right)$ (perché in questo intervallo $128\cos t>0$). Quindi, siccome $\tan t-\frac{123}{128}<0$, $\Rightarrow \quad \varphi'(t)<0$;
- in $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ si ha che $\cos t>0$, $\sin t>0$ e il segno di $(-125\cos t+128\sin t)$ equivale a quello di $\left(\frac{-125\cos t+128\sin t}{128\cos t}\right)$ cioè di $\left(\tan t-\frac{125}{128}\right)$ (perché in questo intervallo $128\cos t>0$). Quindi, siccome $\tan t-\frac{123}{128}>0$, $\Rightarrow \quad \varphi'(t)>0$;
- in $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ si ha che $\cos t<0$, $\sin t>0$ e il segno di $(-125\cos t+128\sin t)$ è opposto a quello di $\left(\frac{-125\cos t+128\sin t}{128\cos t}\right)$ cioè di $\left(\tan t-\frac{125}{128}\right)$ (perché in questo intervallo $128\cos t<0$). Quindi, siccome $\tan t-\frac{123}{128}<0$, $(-125\cos t+128\sin t)>0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(t)<0$;
- in $(\pi,\alpha+\pi)$ si ha che $\cos t<0$, $\sin t<0$ e il segno di $(-125\cos t+128\sin t)$ è opposto a quello di $\left(\frac{-125\cos t+128\sin t}{128\cos t}\right)$ cioè di $\left(\tan t-\frac{125}{128}\right)$ (perché in questo intervallo $128\cos t<0$). Quindi, siccome $\tan t-\frac{123}{128}<0$, $(-125\cos t+128\sin t)>0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(t)>0$;
- in $\left(\alpha+\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ si ha che $\cos t<0$, $\sin t<0$ e il segno di $(-125\cos t+128\sin t)$ è opposto a quello di $\left(\frac{-125\cos t+128\sin t}{128\cos t}\right)$ cioè di $\left(\tan t-\frac{125}{128}\right)$ (perché in questo intervallo $128\cos t<0$). Quindi, siccome $\tan t-\frac{123}{128}>0$, $(-125\cos t+128\sin t)<0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(t)<0$;
- in $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ si ha che $\cos t>0$, $\sin t<0$ e il segno di $(-125\cos t+128\sin t)$ equivale a quello di $\left(\frac{-125\cos t+128\sin t}{128\cos t}\right)$ cioè di $\left(\tan t-\frac{125}{128}\right)$ (perché in questo intervallo $128\cos t>0$). Quindi, siccome $\tan t-\frac{123}{128}<0$, $(-125\cos t+128\sin t)<0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'(t)>0$.

Quindi abbiamo che i punti di minimo relativo per $\varphi(t)$ sono: α, π, $\frac{3\pi}{2}$ a cui corrispondono i punti

$$=\left(\frac{5}{\sqrt{1+\left(\frac{125}{128}\right)^2}},\frac{4\cdot\frac{125}{128}}{\sqrt{1+\left(\frac{125}{128}\right)^2}}\right)=\left(\frac{640}{\sqrt{32009}},\frac{500}{\sqrt{32009}}\right)\approx(3.58,2.79), \qquad (-5,0) \qquad \text{e} \qquad (0,-4)$$

rispettivamente; mentre i punti di massimo relativo sono $\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\pi$ a cui corrispondono i punti $(0,4)$ e $\left(-\frac{640}{\sqrt{32009}},-\frac{500}{\sqrt{32009}}\right)\approx(-3.58,-2.79)$. In tali punti la funzione vale

$$\varphi(\alpha)=125\cos^3\alpha+128\sin^3\alpha==125\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)^3+128\left(\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\right)^3$$

$$=125\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{125}{128}\right)^2}}\right)^3+128\left(\frac{\left(\frac{125}{128}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{125}{128}\right)^2}}\right)^3==125\left(\frac{128}{\sqrt{128^2+125^2}}\right)^3+128\left(\frac{125}{\sqrt{128^2+125^2}}\right)^3$$

$$=125\left(\frac{128}{\sqrt{32009}}\right)^3+128\left(\frac{125}{\sqrt{32009}}\right)^3=\frac{512144000}{32009\sqrt{32009}}=\frac{16000}{\sqrt{32009}}\approx 89,43;$$

$$\varphi(\pi)=125\cos^3\pi+128\sin^3\pi=-125;$$

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=125\cos^3\frac{3\pi}{2}+128\sin^3\frac{3\pi}{2}=-128;$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=125\cos^3\frac{\pi}{2}+128\sin^3\frac{\pi}{2}=128;$$

$$\varphi(\alpha+\pi)=125\cos^3(\alpha+\pi)+128\sin^3(\alpha+\pi)=-125\cos^3(\alpha)-128\sin^3(\alpha)=-\frac{16000}{\sqrt{32009}}\approx -89,43.$$

Inoltre agli estremi 0 e 2π, a cui corrisponde il punto $(5,0)$ si ha $\varphi(0)=125\cos^3 0+128\sin^3 0=125$ e $\varphi(2\pi)=125\cos^3(2\pi)+128\sin^3(2\pi)=125$.

P	F(P)
$\left(\frac{640}{\sqrt{32009}},\frac{500}{\sqrt{32009}}\right)$	89,43
$(-5,0)$	-125
$(0,-4)$	-128
$(0,4)$	128
$\left(-\frac{640}{\sqrt{32009}},-\frac{500}{\sqrt{32009}}\right)$	-89,43
$(5,0)$	125

In conclusione si ha il massimo assoluto M = 128 nel punto $t_M = \frac{\pi}{2}$ che corrisponde al punto $P_M\left(5\cos\frac{\pi}{2}, 4\sin\frac{\pi}{2}\right) = (0,4)$, e il minimo assoluto m = - 128 nel punto $t_m = \frac{3\pi}{2}$ che corrisponde al punto $P_m\left(5\cos\frac{3\pi}{2}, 4\sin\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-4)$.

SCHEMA PER LA RICERCA DEI MAX E MIN RELATIVI E ASSOLUTI IN DOMINI LIMITATI

12. - Massimi e minimi relativi e assoluti in un dominio limitato *D*

- si trovano tutti i punti stazionari di $f(x,y)$ nei punti interni di *D* risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases};$$

- si calcola la matrice hessiana $f(x,y)$ (ricordarsi che $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$).

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix},$$

e il determinante hessiano nei punti stazionari interni a *D*. Quindi

1) Se $|H(x_0, y_0)| > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, *allora* P_0 *è un punto di minimo relativo per f;*

2) Se $|H(x_0, y_0)| > 0$ *e* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, *allora* P_0 *è un punto di massimo relativo per f;*

3) Se $|H(x_0, y_0)| < 0$ *allora* P_0 *è un punto di sella per f.*

4) Se $|H(x_0, y_0)| = 0$ *allora non si può dire nulla.*

- si trovano tutti i punti di estremo relativo sulla frontiera di *D;*

12.1 <u>I caso: D è un quadrato, un rettangolo o un triangolo</u>

- Si parametrizza ciascun lato di *D* esprimendo così la $f(x,y)$ mediante una funzione $\varphi(t)$ di una sola variabile $t\in[a,b]$;

Su ciascuno dei lati parametrizzati

- Si determinano gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ in (a,b) studiando il segno di $\varphi'(t)$;
- si calcola la $\varphi(t)$ negli estremi *a* e *b*.
- Il massimo e minimo assoluti si determinano confrontando i valori assunti da $f(x,y)$ nei vari punti sopra determinati.

12.2 <u>II caso: *D* è un cerchio di raggio *R* con centro in</u> (x_0, y_0)

- Si parametrizza la circonferenza di eq $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ utilizzando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

esprimendo così la $f(x,y)$ mediante una funzione $\varphi(t)$ di una sola variabile $t\in[0,2\pi]$;

- Si determinano gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ in $[0,2\pi]$ studiando il segno di $\varphi'(t)$;
- Il massimo e minimo assoluti si determinano confrontando i valori assunti da $f(x,y)$ nei vari punti sopra determinati.

12.3 <u>II caso: *D* è regione delimitata da una ellisse di semiassi *a* e *b* centrata in</u> (x_0, y_0)

- Si parametrizza l'ellisse di eq. $\left(\dfrac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y-y_0}{b}\right)^2=1$ utilizzando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

esprimendo così la $f(x,y)$ mediante una funzione $\varphi(t)$ di una sola variabile $t\in[0,2\pi]$;

- Si determinano gli eventuali estremi relativi di $\varphi(t)$ in $[0,2\pi]$ studiando il segno di $\varphi'(t)$;
- Il massimo e minimo assoluti si determinano confrontando i valori assunti da $f(x,y)$ nei vari punti sopra determinati.