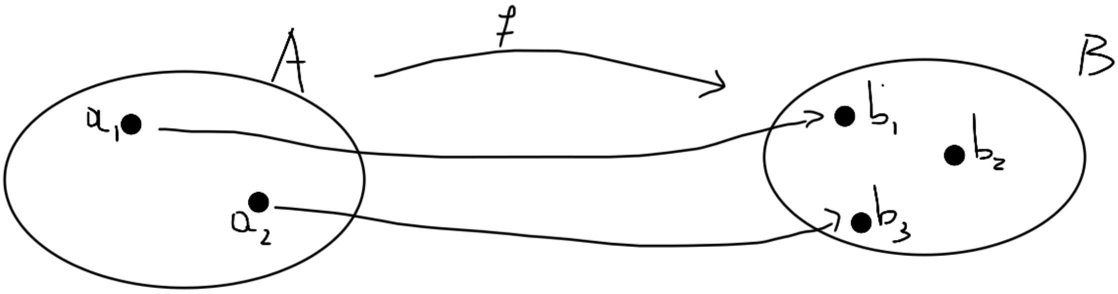
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

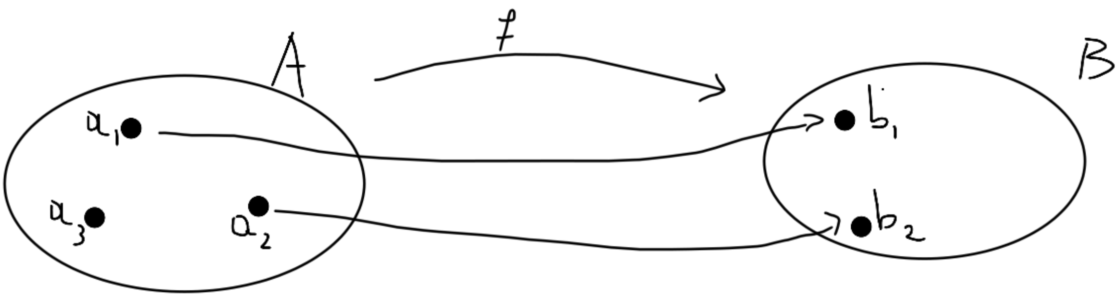
Si dice *funzione reale di una variabile reale*, e useremo il simbolo $f : A \to B$ per indicarla, una relazione che associa a ciascun elemento di *A* (che chiameremo provvisoriamente insieme di partenza di *f*) uno ed un solo elemento di *B* (che chiameremo provvisoriamente insieme di arrivo di *f*).

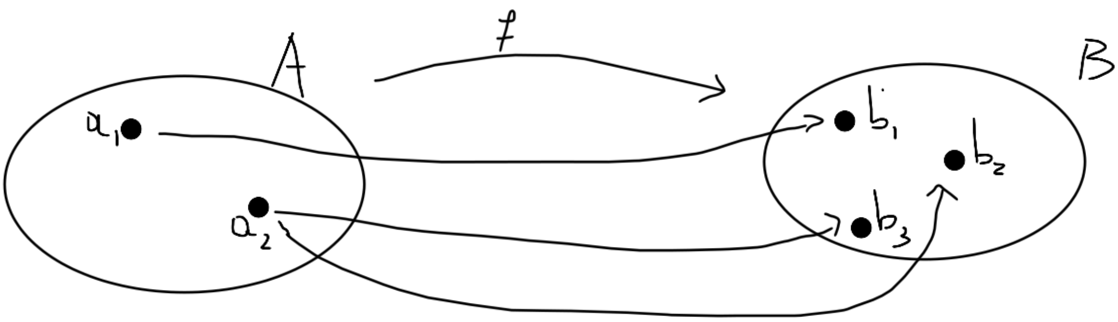


Questo è un esempio di relazione che soddisfa le due condizioni per essere considerata una *funzione reale di una variabile reale,* perché tutti gli elementi di *A* sono soggetti all'azione di *f* e, inoltre, a ciascun elemento di *A* viene associato uno ed un solo elemento di *B*.

Scriveremo che $b_1 = f(a_1)$ e $b_3 = f(a_2)$, e diremo che b_1 è l'immagine di a_1 mediante *f* e che b_3 è l'immagine di a_2 mediante *f*. Nello stesso tempo diremo che a_1 è la controimmagine di b_1 mediante *f* e che a_2 è la controimmagine di b_3 mediante *f*. L'elemento b_2 non ha controimmagine.

Esempi di relazioni che non sono *funzioni reali di una variabile reale:*

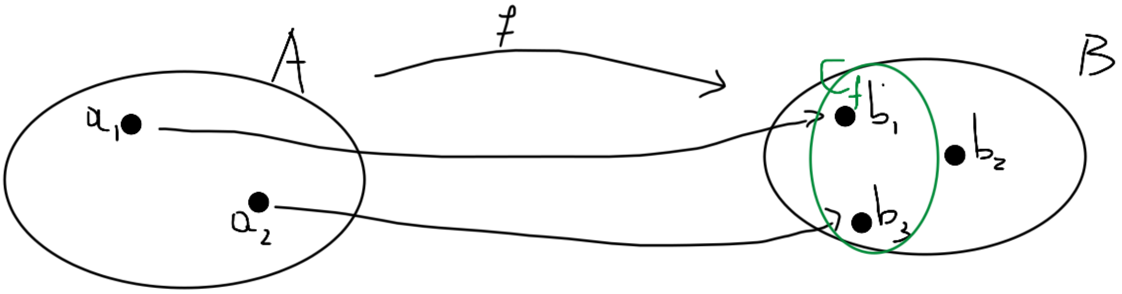




Definizione: una *funzione reale di una variabile reale,* $f : A \to B$, si dice *suriettiva* se ogni elemento di *B* ha una controimmagine in *A*.

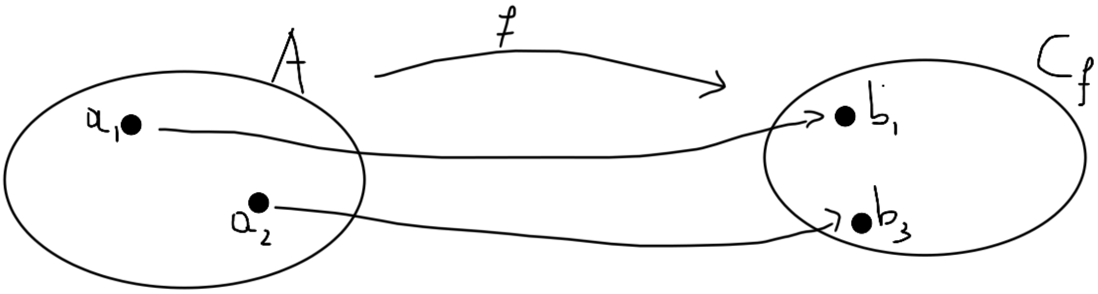
Il primo esempio rappresenta una funzione non suriettiva.

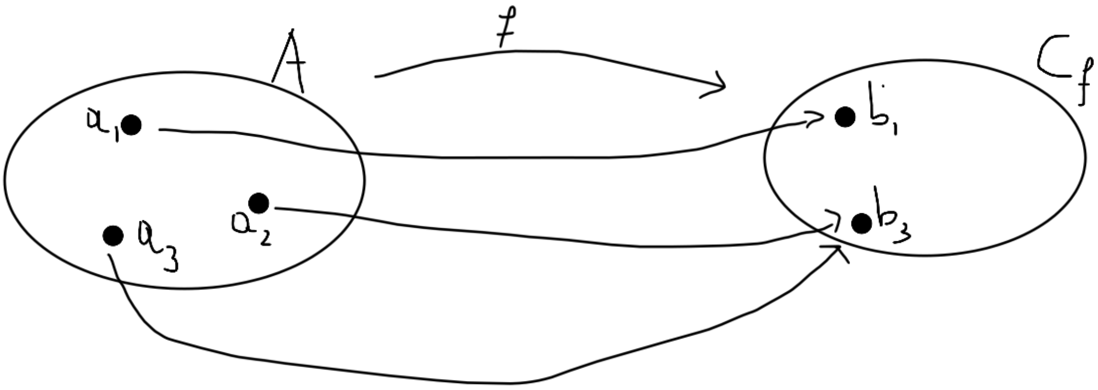
Definizione: si dice codominio di $f : A \to B$ il sottoinsieme $C_f \subseteq B$ che contiene tutte le immagini degli elementi di A.



$$C_f = \{b_1, b_3\}$$

D'ora in poi considereremo, come insieme di arrivo di f, direttamente il suo codominio, $f : A \to C_f$, trascurando gli eventuali elementi di B che non sono soggetti all'azione della funzione. Di conseguenza le funzioni che prenderemo in esame saranno tutte suriettive.



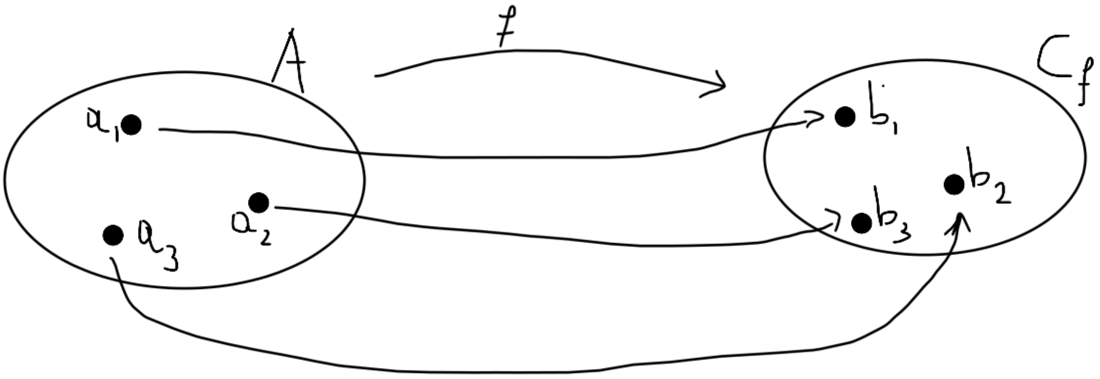


Quest'ultima funzione ha la particolarità che due elementi distinti di A, a_2 e a_3, hanno la stessa immagine b_3. Funzioni che presentano questa particolarità, anche solo per una coppia di elementi di A, diremo che non sono iniettive.

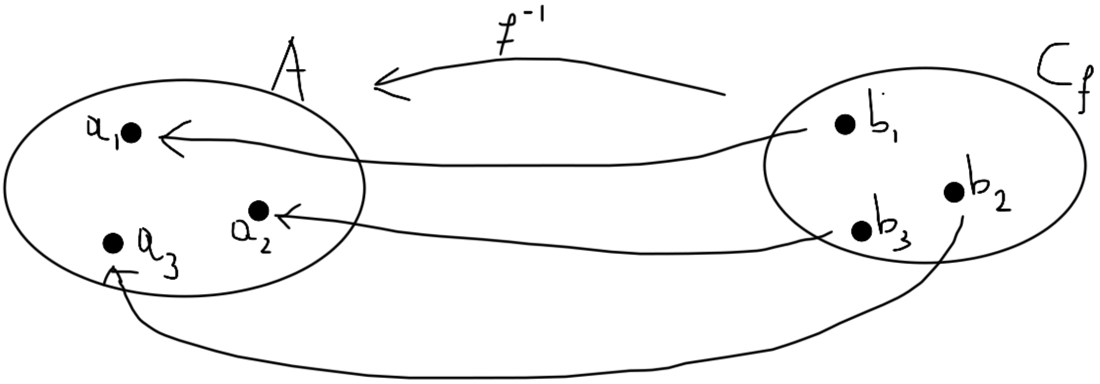
Definizione: una *funzione reale di una variabile reale* $f : A \to C_f$ si dice *iniettiva* se ad ogni coppia di elementi distinti di A corrisponde coppia di elementi distinti di C_f.

Una funzione $f : A \to C_f$ iniettiva (e, implicitamente, suriettiva) si dice biiettiva o biunivoca.

Se soddisfatta, quest'ultima condizione (la biiettività) consente l'invertibilità della funzione $f : A \to C_f$, ossia la definizione della sua funzione inversa $f^{-1} : C_f \to A$ che è una nuova *funzione reale di una variabile reale* che mantiene sostanzialmente lo stesso legame tra gli elementi di A e C_f scambiandone tuttavia il ruolo di immagine e controimmagine, come mostra il seguente esempio



$$b_1 = f(a_1),\ b_2 = f(a_3),\ b_3 = f(a_2)$$



$$a_1 = f^{-1}(b_1),\ a_2 = f^{-1}(b_3),\ a_3 = f^{-1}(b_2)$$

Le *funzioni reali di una variabile reale* $f : A \to C_f$ che considereremo, saranno sempre definite mediante una espressione analitica che indicheremo simbolicamente $y = f(x)$. La x, detta variabile indipendente, può assumere, in modo arbitrario, ogni valore numerico contenuto nell'insieme A, mentre la y, detta variabile dipendente, assume, di conseguenza, il valore numerico determinato dall'espressione analitica corrispondente al valore assegnato alla x. Quindi, è necessario che A contenga tutti e soli numeri reali che non siano in conflitto con l'espressione analitica (per esempio se l'espressione analitica presenta un denominatore, A non potrà contenere i numeri reali che annullano tale denominatore). Per tale motivo chiameremo d'ora in poi A il campo di esistenza della funzione. Tuttavia, a volte saremo interessati a studiare le proprietà di una funzione non in tutto il suo campo di esistenza, ma solo in un suo sottoinsieme che chiameremo dominio di f e che indicheremo con il simbolo D_f (ovviamente si ha $D_f \subseteq A$).

In definitiva, una funzione reale di una variabile reale verrà sempre identificata il simbolo

$$\begin{array}{rcl} f: D_f & \rightarrow & C_f \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Ad una *funzione reale di una variabile reale*, definita mediante una espressione analitica, si può sempre far corrispondere un grafico nel piano cartesiano, che la rappresenta geometricamente. Il grafico è dato quindi dal sottoinsieme

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in D_f \wedge y = f(x)\}.$$

Conoscere il grafico di una funzione è di fondamentale importanza perché da una sua osservazione si possono dedurre tutte le proprietà della funzione. In tal senso, saremo impegnati a fornire tutti gli strumenti utili per raggiungere tale obiettivo.

I grafici di alcune funzioni, aventi il dominio simmetrico rispetto l'origine (cioè tale che $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$), presentano delle particolari simmetrie che rendono più veloce lo studio delle proprietà della funzione.

Definizione: una funzione *f*, per cui $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$, si dice pari se

$$\forall x \in D_f \Rightarrow \quad f(-x) = f(x).$$

Definizione: una funzione *f*, per cui $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$, si dice dispari se

$$\forall x \in D_f \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x).$$

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine del piano cartesiano.

Riformuliamo il concetto di funzione iniettiva per funzioni definite mediante una espressione analitica.

Definizione: una *funzione reale di una variabile reale*

$$\begin{array}{rcl} f: D_f & \rightarrow & C_f \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

si dice *iniettiva* se ad ogni coppia di valori $x_1, x_2 \in D_f$ (con $x_1 \neq x_2$) risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se la funzione è iniettiva allora è invertibile, e la sua funzione inversa è definita come segue

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: C_f & \rightarrow & D_f \\ y & \mapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}.$$

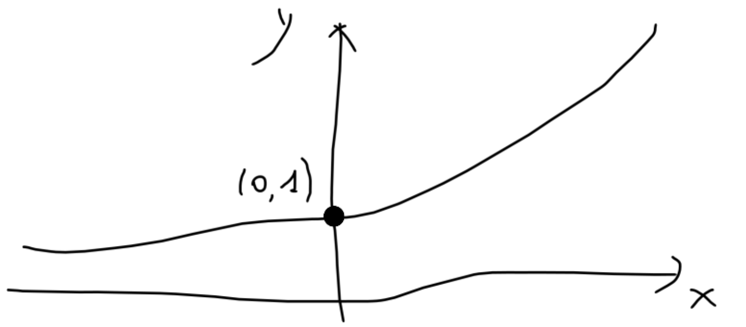
In pratica, pur mantenendo lo stesso legame tra i valori di D_f e C_f, si invertono i ruoli di questi insiemi e quindi quello della variabile indipendente *x* (che diventa dipendente) e della variabile dipendente *y* (che diventa indipendente).

Graficamente la funzione è iniettiva (quindi invertibile) se ogni retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione al più in un punto.

Se la funzione è invertibile, allora, come conseguenza del fatto che il legame tra gli elementi del dominio e quelli del codominio resta lo stesso, il grafico della funzione inversa si può facilmente dedurre da quello della funzione diretta; esso è infatti dato dalla curva simmetrica a G_f rispetto la bisettrice del 1 e 3 quadrante. Per esempio, la funzione elementare

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\rightarrow \quad \mathbb{R}^{+} \\ x &\mapsto y = f(x) = e^{x} \end{aligned}$$

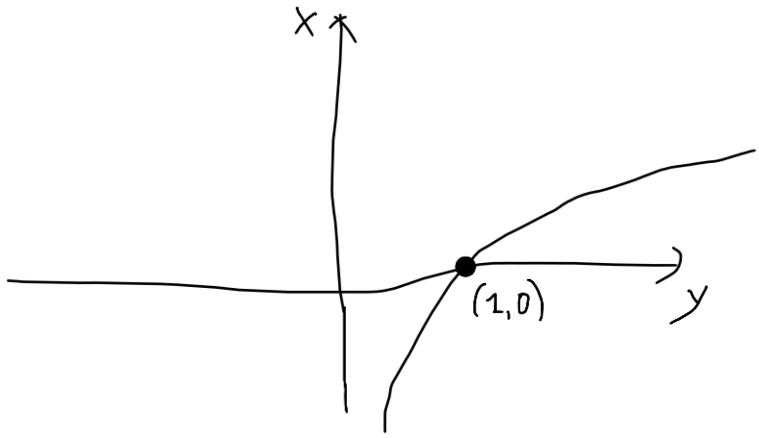
il cui grafico è dato dalla seguente curva



risulta invertibile, la rispettiva funzione inversa (il logaritmo naturale) è la funzione

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \mathbb{R}^{+} &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y) = \ln y \end{aligned}$$

il cui grafico è dato dalla seguente curva



Definizione: una *funzione reale di una variabile reale*

$$\begin{array}{rcc} f: D_f & \to & C_f \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

si dice strettamente crescente se ad ogni coppia di valori distinti $x_1, x_2 \in D_f$ (con $x_1 < x_2$) risulta $f(x_1) < f(x_2)$ (ossia non cambia la relazione d'ordine tra due valori distinti del dominio e le rispettive immagini).

Analogamente

Definizione: una *funzione reale di una variabile reale*

$$\begin{array}{rcc} f: D_f & \to & C_f \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

si dice strettamente decrescente se ad ogni coppia di valori distinti $x_1, x_2 \in D_f$ (con $x_1 < x_2$) risulta $f(x_1) > f(x_2)$ (in tal caso cambia la relazione d'ordine tra due valori distinti del dominio e le rispettive immagini).

Definizione: una *funzione reale di una variabile reale*

$$\begin{array}{rcc} f: D_f & \to & C_f \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

si dice debolmente crescente (o decrescente) se ad ogni coppia di valori distinti $x_1, x_2 \in D_f$ (con $x_1 < x_2$) risulta $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ovvero $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Una funzione che rientra in uno di questi quattro casi si dice monotòna.

Teorema: una *funzione reale di una variabile reale*

$$\begin{array}{rcc} f: D_f & \to & C_f \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

strettamente monotona è iniettiva (e quindi, invertibile).

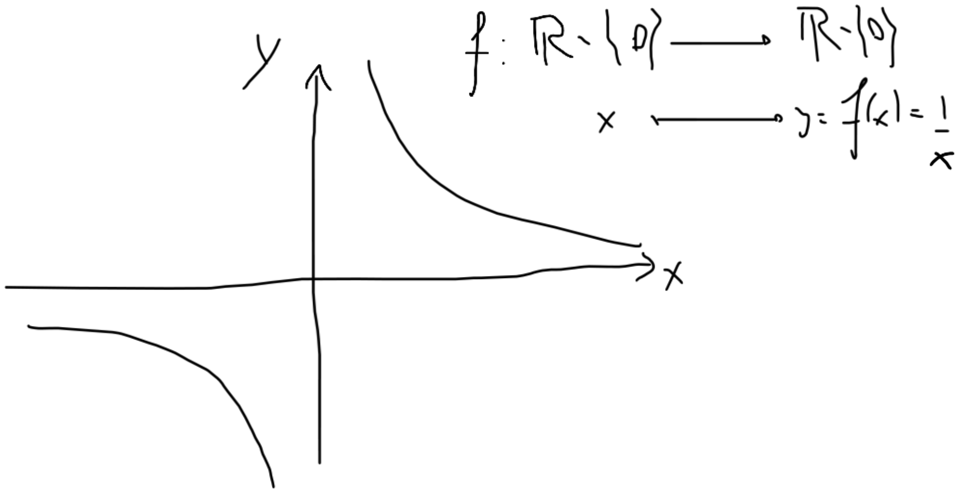
Dim. Basta esplicitare l'Hp. e la Th. e constatare che dalla prima segue la seconda. Supponiamo che la funzione sia strettamente crescente. Allora si ha

Hp.: $\forall x_1, x_2 \in D_f$ (con $x_1 < x_2$) risulta $f(x_1) < f(x_2)$;

$$\Downarrow$$

Th.: $\forall x_1, x_2 \in D_f$ (con $x_1 < x_2$) risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.

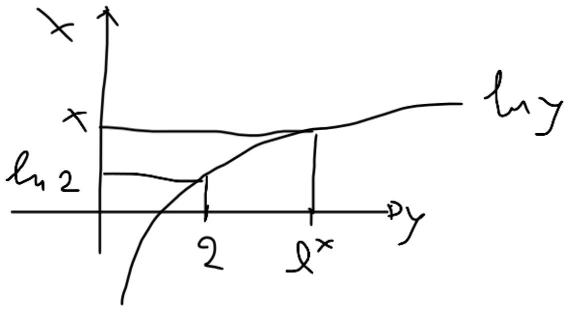
Il viceversa di questo teorema non vale in generale, ossia una funzione può essere iniettive senza che sia strettamente monotona come mostra il seguente esempio:



Le funzioni strettamente monotone hanno un ruolo importante nella risoluzione delle disequazioni. Consideriamo la disequazione

$$e^x > 2$$

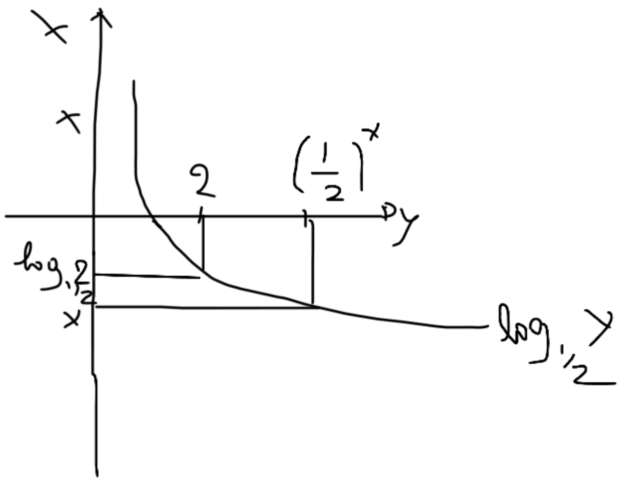
Essa si risolve considerando, in entrambi i membri, le immagini dei valori e^x e 2 mediante la funzione inversa dell'esponenziale naturale (la funzione logaritmica naturale). Siccome $y = e^x$ e la sua inversa $x = \ln y$ sono funzioni strettamente crescenti la relazione d'ordine tra i valori e^x e 2 e tra $\ln\left(e^x\right)$ e $\ln 2$ non cambia. Si ha così che da $e^x > 2$ si perviene a $\ln\left(e^x\right) = x > \ln 2$, cioè alla soluzione desiderata.



Nello stesso tempo, se consideriamo la disequazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$$

Essa si risolve considerando, in entrambi i membri, le immagini dei valori $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e 2 mediante la funzione inversa dell'esponenziale di base 1/2 (la funzione logaritmica in base 1/2). Siccome $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e la sua inversa $x = \log_{1/2} y$ sono funzioni strettamente decrescenti la relazione d'ordine tra i valori $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e 2 e tra $\log_{1/2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ e $\log_{1/2} 2$ cambia. Si ha così che da $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2$ si perviene a $\log_{1/2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = x < \log_{1/2} 2$, cioè alla soluzione desiderata.



Sia data una funzione

$$\begin{array}{llll} f: & D_f & \to & C_f \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Definizione: Un numero reale M si dice maggiorante di f se

$$\forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) \le M\,.$$

Definizione: La funzione si dice limitata superiormente se ammette un (e di conseguenza infiniti) maggioranti, altrimenti si dice illimitata superiormente.

Sia f limitata superiormente. Allora

Definizione: Un numero reale Λ si dice estremo superiore di f ($\Lambda = \sup f$) se

1) $\forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) \le \Lambda$

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in D_f \;\; / \;\; f(x) > \Lambda - \varepsilon$

Definizione: Un numero reale M si dice massimo assoluto di f ($M = \max f$) se

1) $\forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) \le M$

2) $\exists x_M \in D_f \;\; / \;\; f(x_M) = M$

$x_M \in D_f$ viene detto punto di massimo assoluto (e ne possono esistere anche più di uno; mentre il massimo assoluto e l'estremo superiore, se esistono, sono unici).

Analogamente

Definizione: Un numero reale m si dice minorante di f se

$$\forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge m\,.$$

Definizione: La funzione si dice limitata inferiormente se ammette un (e di conseguenza infiniti) minoranti, altrimenti si dice illimitata inferiormente.

Sia f limitata inferiormente. Allora

Definizione: Un numero reale λ si dice estremo inferiore di f ($\lambda = \inf\ f$) se

$$1) \quad \forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq \lambda$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in D_f \ \ / \ \ f(x) < \lambda + \varepsilon$$

Definizione: Un numero reale m si dice minimo assoluto di f ($m = \min\ f$) se

$$1) \quad \forall x \in D_f \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq m$$

$$2) \quad \exists x_m \in D_f \ \ / \ \ f(x_m) = m$$

$x_m \in D_f$ viene detto punto di minimo assoluto (e ne possono esistere anche più di uno; mentre il minimo assoluto e l'estremo inferiore, se esistono, sono unici).

Esercizio: Dimostrare o confutare mediante la definizione $0 = \inf\limits_{x \neq 0} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{x}}$, $1 = \sup\limits_{x \neq 0} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{x}}$, $1 = \sup\limits_{x > 0} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{x}}$

Prima parte

1) $\forall x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} \geq 0$ verificata per le proprietà delle funzioni esponenziali

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \neq 0 \ \ / \ \ \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} < \varepsilon$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \log_{1/\pi} \varepsilon \ \gg 0$$

$$\text{se } x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{\log_{1/\pi} \varepsilon} \ \sim 0^+ \qquad \text{ok}$$

Seconda parte

1) $\forall x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} \leq 1$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \geq \log_{1/\pi} 1 = 0 \ \text{ falsa per } x < 0$$

Terza parte

1) $\forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} \leq 1$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \text{ok}$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x > 0 \ \ / \ \ \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} > 1-\varepsilon$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/x} > 1-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < \log_{1/\pi}(1-\varepsilon) \ \sim 0^{+} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{\log_{1/\pi}(1-\varepsilon)}$$