P. 1

### INTEGRALI CURVILINEI

Un curva  $\gamma$ , nello spazio  $\mathbb{R}^n$ , è una applicazione vettoriale  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  definita in un opportuno intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , cioè

$$\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto P = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{pmatrix}.$$

Le componenti  $(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$  del vettore  $\vec{r}(t)$  rappresentano le coordinate del generico punto P mobile sulla curva. L'insieme  $\gamma$  dei punti  $P = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$  ottenuti al variare del parametro t nell'intervallo [a,b] è detto sostegno della curva (è il grafico della curva). Il sistema

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} t \in I$$

viene detto equazione parametrica della curva.

**Esempio 21.1.**  $\gamma: \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 - t - 2 \end{cases}$   $t \in \mathbb{R}$  è una curva nel piano.

In particolare

**Definizione 21.1:** si dice *arco di curva regolare semplice*  $\gamma$  di  $\mathbb{R}^n$ , una applicazione vettoriale  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  definita in un intervallo chiuso e limitato I = [a,b], cioè

$$\vec{r}:[a,b]\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$$

$$t\mapsto P=\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x_1=\varphi_1(t)\\ \vdots\\ x_n=\varphi_n(t)\end{pmatrix},$$

se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

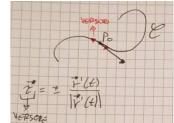
- 1) le funzioni  $\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$  sono di classe  $C^1$  in I = [a,b] ( $\varphi_i \in C^1([a,b])$ ), cioè derivabili e con derivata continua in I = [a,b];
- 2) le funzioni derivate prime  $\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t)$  non devono annullarsi contemporaneamente per nessun valore della variabile t in I = [a,b], cioè  $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2} > 0$ ,  $\forall t \in [a,b]$ ;

3)  $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$  distinti, di cui uno almeno interno, si ha  $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$  e viceversa; cioè l'applicazione  $\vec{r}$  è una corrispondenza biunivoca tra  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e il sostegno  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ .

La curva è piana se giace su un piano altrimenti si dice sghemba. Inoltre, data una curva regolare in  $\mathbb{R}^n$ , è sempre possibile scegliere un orientamento della stessa che verrà considerato come il verso di percorrenza positivo (sarà negativo il verso di percorrenza opposto).

La condizione 1) assicura che in ogni punto della curva, cioè  $\forall t \in [a,b]$ , esiste un unico vettore

tangente  $\vec{r}'(t) = (\varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t))$ ; la condizione 2) assicura che in ogni punto della curva, cioè  $\forall t \in [a,b]$ , esiste il versore tangente  $\vec{\tau}(t) = \pm \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left|\varphi_1'(t)\right|^2 + \dots + \left|\varphi_n'(t)\right|^2}} (\varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t))$  (con il segno



positivo se il versore  $\vec{\tau}(t)$  e l'arco di curva hanno lo stesso orientamento, negativo

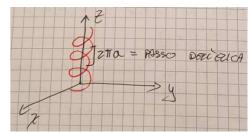
nel caso opposto); la condizione 3) assicura che ogni punto della curva sia semplice cioè che due diversi valori di t (di cui uno almeno interno all'intervallo [a,b]) individuano punti diversi sulla curva. Se  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  la curva si dice chiusa (o circuitazione).

Infine, osserviamo, che una stessa curva può essere rappresentata da applicazioni diverse (può essere parametrizzata in modi diversi).

**Esempio 21.2.** L'arco di curva  $\gamma: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$   $t\in [0,\pi]$ , è un arco di curva regolare nel piano. Rappresenta la semicirconferenza, nel semipiano  $y\geq 0$ , centrata nell'origine e raggio 2 di eq. cartesiana  $x^2+y^2=4$ .

Esempio 21.3. L'arco di curva  $\gamma$ :  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t & t \in I, \text{ con } a \text{ costante} \\ z = at \end{cases}$ 

non nulla, è un arco di curva regolare nello spazio, detta elica cilindrica.



La definizione di arco di curva regolare in  $\mathbb{R}^n$  si può generalizzare nel seguente modo:

**Definizione 21.2:** si dice *arco di curva generalmente regolare (o regolare a tratti)*  $\gamma$  di  $\mathbb{R}^n$ , se  $\gamma$  è l'unione di un numero finito di archi di curva regolari  $\gamma_i$ , cioè  $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_m$ . Per esempio due o più segmenti adiacenti o la frontiera di un poligono.

**Definizione 21.3:** lunghezza di un arco di curva regolare in  $R^2$  e  $R^3$ 

Sia  $\gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$   $t\in [a,b]$  un arco di curva regolare. La lunghezza dell'arco di curva  $\gamma$  è data dall'integrale

lunghezza 
$$(\gamma) = \int_{a}^{b} \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2}} dt$$
.

Sia  $\gamma$ :  $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$   $t \in [a,b]$  un arco di curva regolare. La lunghezza dell'arco di curva  $\gamma$  è data z=z(t)

dall'integrale

lunghezza 
$$(\gamma) = \int_{a}^{b} \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2} + \left[z'(t)\right]^{2}} dt$$
.

**Esempio 21.4.** Calcolare la lunghezza dell'arco di curva  $\gamma:\begin{cases} x=t^3\\ y=t^2 \end{cases}$   $t\in[1,3]$ . L'eq. cartesiana

dell'arco di curva si ottiene osservando che  $t^6 = x^2 = y^3$ , da cui  $y = x^{\frac{2}{3}}$ . Gli estremi dell'arco si ricavano dall'eq. parametrica sostituendo i valori t = 1 e t = 3 all'eq. parametrica: sono A(1,1) e B(27,9).



Si ha

lunghezza 
$$(\gamma) = \int_{1}^{3} \sqrt{(3t^{2})^{2} + (2t)^{2}} dt = \int_{1}^{3} \sqrt{9t^{4} + 4t^{2}} dt = \int_{1}^{3} t (9t^{2} + 4)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{18} \int_{1}^{3} (9t^{2} + 4)^{\frac{1}{2}} d (9t^{2} + 4) = \frac{1}{18} \left[ (9t^{2} + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{3} = \frac{1}{27} \left( 85^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}} \right).$$

**Esempio 21.5.** Calcolare la lunghezza dell'arco di curva di eq. cartesiana  $y = \cosh x$  con  $x \in [0, a]$ .

L'eq parametrica dell'arco di curva è  $\gamma$ :  $\begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases}$   $t \in [0, a]$ . Dalla definizione si ha

lunghezza 
$$(\gamma) = \int_{0}^{a} \sqrt{1 + (\sinh t)^{2}} dt = \int_{0}^{a} \cosh t dt = \sinh a$$
.

**Definizione 21.4:** integrale curvilineo di una funzione scalare (rispetto alla lunghezza d'arco) in R<sup>2</sup>

Sia 
$$\gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$
  $t\in[a,b]$  un arco di curva regolare e sia  $f(x,y)$  una funzione (scalare)

continua in un sottoinsieme  $E \subseteq R^2$  contenente l'arco di curva  $\gamma$  (cioè  $\gamma \subset E$ ). Allora, detti A(x(a),y(a)) e B(x(b),y(b)) gli estremi dell'arco di curva  $\gamma$ , si ha

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y) ds = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t)) \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2}} dt.$$

**Definizione 21.5:** integrale curvilineo di una funzione scalare (rispetto alla lunghezza d'arco) in R<sup>3</sup>

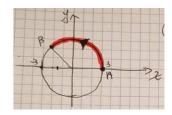
Sia 
$$\gamma$$
:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$   $t \in [a,b]$  un arco di curva regolare e sia  $f(x,y,z)$  una funzione (scalare)  $z = z(t)$ 

continua in un sottoinsieme  $E \subseteq R^3$  contenente l'arco di curva  $\gamma$  (cioè  $\gamma \subset E$ ). Allora, detti A(x(a),y(a),z(a)) e B(x(b),y(b),z(b)) gli estremi dell'arco di curva  $\gamma$ , si ha

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y,z) ds = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t),z(t)) \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2} + \left[z'(t)\right]^{2}} dt.$$

**Esempio 21.6.** Calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma(A,B)} x^2 y \, ds$  dove  $\gamma$  è il minore dei

due archi di curva di eq. cartesiana  $x^2 + y^2 = 9$  delimitati dai punti A(3,0) e  $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .



L'eq parametrica dell'arco di curva è  $\gamma$ :  $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$   $t \in [0, t_B]$ . Calcoliamo

l'anomalia del punto B. Siccome B si trova nel secondo quadrante utilizziamo la prima eq.

parametrica; abbiamo 
$$-\frac{3}{2} = 3\cos t_B \implies \cos t_B = -\frac{1}{2} \implies t_B = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
.

Quindi, dalla definizione, si ha

$$\int_{\gamma(A,B)} x^2 y \, ds = \int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(9\cos^2 t\right) (3\sin t) \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} \, dt = -\frac{81}{3} \left[\cos^3 t\right]_{0}^{\frac{2\pi}{3}} = -27 \left(\cos^3 \left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1\right) =$$

$$= -27 \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{243}{8}.$$

Osservazione 1. per calcolare un integrale curvilineo di uno scalare lungo una curva regolari a tratti occorre sommare gli integrali curvilinei dello stesso scalare calcolati sui singoli archi di curva regolari.

Osservazione 2. gli integrali curvilinei di scalari, a differenza di quelli di campi vettoriali (che vedremo nella prossima lezione), sono indipendenti dal verso di percorrenza scelto per la curva.

In merito a questa seconda osservazione consideriamo il seguente esempio

**Esempio 21.7.** Calcolare l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma(A,B)} xy \, ds$  dove  $\gamma$  è il segmento di estremi A(1,1) e B(0,1) orientato secondo il verso che va da A a B.

Lo stesso segmento può essere parametrizzato nei seguenti due modi differenti

$$\gamma: \begin{cases} x=1-t \\ y=1 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \text{oppure} \quad \gamma: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

La prima parametrizzazione è concorde con l'orientamento scelto per l'arco di curva, mentre la seconda è opposta (infatti, nella seconda, si ha che al crescere del parametro t da 0 a 1 il punto si sposta sul segmento da B ad A). Tuttavia gli integrali curvilinei calcolati mediante le due parametrizzazioni coincidono. Abbiamo, infatti, con la prima parametrizzazione

$$\int_{\gamma(A,B)} xy \, ds = \int_{0}^{1} (1-t) \, dt = \left[ t - \frac{t^{2}}{2} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} \,;$$

con la seconda

$$\int_{\gamma(A,B)} xy \, ds = \int_{0}^{1} t \, dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} \, .$$

**Definizione 21.6:** massa e coordinate del baricentro di un arco di curva regolare in R<sup>2</sup> (caso omogeneo e non)

Sia  $\gamma$ :  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$   $t \in [a,b]$  un arco di curva regolare e sia  $\mu(x,y)$  una funzione (scalare) continua

non negativa che rappresenta la densità lineare dell'arco di curva  $\gamma$  (cioè la sua massa per unità di lunghezza). Allora si ha

$$massa(\gamma) = \int_{\gamma(A,B)} \mu(x,y) ds$$
.

Nel caso in cui l'arco di curva è omogeneo, cioè la sua densità lineare  $\mu$  è costante, allora

massa 
$$(\gamma) = \mu \int_{\gamma(A,B)} ds = \mu \operatorname{lunghezza}(\gamma)$$
.

Inoltre detto  $G(G_x, G_y)$  il baricentro dell'arco di curva, si ha

$$G_{x} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} x \mu(x,y) ds}{massa(\gamma)} \qquad e \qquad G_{y} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} y \mu(x,y) ds}{massa(\gamma)}$$

nel caso non omogeneo, mentre nel caso omogeneo si ha

$$G_{x} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} xds}{\operatorname{lunghezza}(\gamma)} \qquad \text{e} \qquad G_{y} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} yds}{\operatorname{lunghezza}(\gamma)}.$$

**Definizione 21.7:** massa e coordinate del baricentro di un arco di curva regolare in R<sup>3</sup> (caso omogeneo e non)

Sia 
$$\gamma$$
: 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & t \in [a,b] \text{ un arco di curva regolare e sia } \mu(x,y,z) \text{ una funzione (scalare)} \\ z = z(t) \end{cases}$$

continua non negativa che rappresenta la densità lineare dell'arco di curva  $\gamma$  (cioè la sua massa per unità di lunghezza). Allora si ha

$$massa(\gamma) = \int_{\gamma(A,B)} \mu(x,y,z) ds$$
.

Nel caso in cui l'arco di curva è omogeneo, cioè la sua densità lineare  $\mu$  è costante, allora

massa 
$$(\gamma) = \mu \int_{\gamma(A,B)} ds = \mu \operatorname{lunghezza}(\gamma)$$
.

Inoltre detto  $G(G_x, G_y, G_z)$  il baricentro dell'arco di curva, si ha

$$G_{x} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} x\mu(x,y,z)ds}{massa(\gamma)}, \qquad G_{y} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} y\mu(x,y,z)ds}{massa(\gamma)} \qquad \text{e} \qquad G_{z} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} z\mu(x,y,z)ds}{massa(\gamma)}$$

nel caso non omogeneo, mentre nel caso omogeneo si ha

$$G_{x} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} xds}{\operatorname{lunghezza}(\gamma)} \; , \quad G_{y} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} yds}{\operatorname{lunghezza}(\gamma)} \qquad \text{e} \qquad G_{z} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} zds}{\operatorname{lunghezza}(\gamma)} \; .$$

**Esempio 21.8.** Calcolare le coordinate del baricentro dell'arco di circonferenza omogenea di eq. cartesiana  $x^2 + y^2 = 4$  che giace nel primo quadrante.

L'eq parametrica dell'arco di curva è  $\gamma$ :  $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$   $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Calcoliamo la lunghezza di  $\gamma$ ,

lunghezza  $(\gamma) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} \, dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$  (si poteva calcolare anche senza utilizzare la formula). Dalla definizione si ha

$$G_{x} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} x ds}{\text{lunghezza}(\gamma)} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sqrt{4\sin^{2} t + 4\cos^{2} t} dt = \frac{4}{\pi} \left[\sin t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi},$$

$$G_{y} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} y ds}{\text{lunghezza}(\gamma)} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \sqrt{4\sin^{2} t + 4\cos^{2} t} dt = -\frac{4}{\pi} \left[\cos t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

### INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI VETTORIALI

Sia  $\gamma(A, B)$  un arco di curva regolare nello spazio  $\mathbb{R}^n$  di estremi A e B, rappresentato dalla funzione vettoriale  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  per  $t \in [a, b]$ . Indichiamo con

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} t \in [a,b]$$

le componenti della funzione vettoriale  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , cioè le equazioni parametriche della curva  $\gamma(A,B)$ . Ricordiamo che una stessa curva può essere rappresentata da più equazioni parametriche, diverse tra loro. Con la notazione  $\gamma(A,B)$  si intende assegnato un verso di percorrenza sull'arco di curva che va da A a B; quindi se il verso di percorrenza sull'arco di curva è concorde con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [a,b], allora si ha che  $A = \vec{r}(a) = (\varphi_1(a), ..., \varphi_n(a))$  e  $B = \vec{r}(b) = (\varphi_1(b), ..., \varphi_n(b))$ , altrimenti se il verso di percorrenza sull'arco di curva è contrario con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [a,b], allora si ha che  $A = \vec{r}(b) = (\varphi_1(b), ..., \varphi_n(b))$  e  $B = \vec{r}(a) = (\varphi_1(a), ..., \varphi_n(a))$ .

Sia, inoltre,  $\vec{F}$  un campo vettoriale definito e continuo sull'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , cioè una funzione vettoriale

$$\vec{F} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \vec{F}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}.$$

**Definizione.** Integrale curvilineo di un campo vettoriale

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} = \pm \int_{a}^{b} \vec{F} \left( \vec{r} \left( t \right) \right) \cdot \vec{r}' \left( t \right) dt$$

dove nell'integrale a secondo membro si intende il prodotto scalare tra i vettori  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  e  $\vec{r}'(t)$ ; inoltre bisogna considerare il segno positivo se il verso di percorrenza scelto sull'arco di curva che va da A a B è concorde con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [a,b], cioè se  $A = \vec{r}(a)$  e  $B = \vec{r}(b)$ , mentre bisogna considerare il segno negativo (o cambiare l'ordine degli estremi di integrazione) se il verso di percorrenza scelto sull'arco di curva che va da A a B è contrario con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [a,b], cioè se  $A = \vec{r}(b)$  e  $B = \vec{r}(a)$ .

Nel caso n=2; sia  $\gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$   $t\in [a,b]$  una rappresentazione parametrica dell'arco di curva  $\gamma(A,B)$  e  $\vec{F}(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$  un campo vettoriale definito nell'aperto  $E\subseteq \mathbb{R}^2$ . Allora si ha

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} = \pm \int_{a}^{b} \left[ f\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + g\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] dt \,. \tag{22.1}$$

Una notazione equivalente a  $\int\limits_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha}$ , per indicare un integrale curvilineo di un campo vettoriale,

è 
$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$
. L'espressione  $f(x,y)dx + g(x,y)dy$  viene detta forma

differenziale. Quindi integrare, su una curva, un campo vettoriale equivale ad integrare una forma differenziale.

Nel caso n = 3; sia  $\gamma$ :  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$  una rappresentazione parametrica dell'arco di curva

 $\gamma(A,B)$  e  $\vec{F}(x,y,z) = (f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z))$  un campo vettoriale definito e continuo nell'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^3$ , si ha

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} d\vec{\alpha} = \pm \int_{a}^{b} \left[ f(x(t),y(t),z(t))x'(t) + g(x(t),y(t),z(t))y'(t) + h(x(t),y(t),z(t))z'(t) \right] dt.$$

In luogo di  $\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} d\vec{\alpha}$  si può scrivere  $\int_{\gamma(A,B)} f(x,y,z) dx + g(x,y,z) dy + h(x,y,z) dz$ .

**Esempio 22.1.** Calcolare  $\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} d\vec{\alpha}$  dove  $\vec{F}(x,y) = (2x+y,y)$  e  $\gamma(A,B)$  è il minore dei due archi di circonferenza di eq.  $x^2 + y^2 = 4$  delimitati dai punti A(2,0) e B(0,2).

Consideriamo la seguente parametrizzazione della curva  $\gamma$ 

$$\gamma: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Il verso di percorrenza sulla curva  $\gamma$  ci deve condurre dal punto A (che corrisponde al valore t=0) al punto B (che corrisponde al valore  $t=\frac{\pi}{2}$ ), quindi esso è concorde con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo  $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ; allora nell'integrale a secondo membro della (22.1) l'estremo inferiore di integrazione deve essere 0, mentre quello superiore deve essere  $\frac{\pi}{2}$ . Dalla (22.1) allora si ha

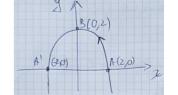
$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} = \int_{\gamma(A,B)} (2x+y) \, dx + y \, dy =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (4\cos t + 2\sin t)(-2\sin t) + (2\sin t)(2\cos t) \right] dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left( -4\sin t \cos t - 4\sin^2 t \right) dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left( -4\sin t \cos t - 2 + 2\cos 2t \right) dt = \left[ 2\cos^{2} t - 2t + \sin 2t \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \left[ 2\cos^{2} t - 2t + \sin 2t \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -2 - \pi.$$

**Esempio 22.2.** Calcolare  $\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} \text{ dove } \vec{F}(x,y) = (2x+y,y) \text{ e } \gamma(A,B) \text{ è l'arco di parabola di }$ 

eq. 
$$y = \frac{4-x^2}{2}$$
 delimitati dai punti  $A(2,0)$  e  $B(0,2)$ .



Consideriamo la seguente parametrizzazione della curva  $\gamma$ 

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{4 - t^2}{2} \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

Il verso di percorrenza sulla curva  $\gamma$  ci deve condurre dal punto A (che corrisponde al valore t=2) al punto B (che corrisponde al valore t=0), quindi esso è contrario con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [0,2]; allora nell'integrale a secondo membro della (22.1) l'estremo inferiore di integrazione deve essere 2, mentre quello superiore deve essere 0. Dalla (22.1) allora si ha

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} = \int_{\gamma(A,B)} (2x + y) \, dx + y \, dy =$$

$$= \int_{2}^{0} \left[ \left( 2t + \frac{4 - t^{2}}{2} \right) + \left( \frac{4 - t^{2}}{2} \right) \left( -t \right) \right] dt = \int_{2}^{0} \left( \frac{t^{3}}{2} - \frac{t^{2}}{2} + 2 \right) dt = \int_{0}^{2} \left( -\frac{t^{3}}{2} + \frac{t^{2}}{2} - 2 \right) dt = \left[ -\frac{t^{4}}{8} + \frac{t^{3}}{6} - 2t \right]_{0}^{2} = -\frac{14}{3}.$$

**Definizione.** Un campo vettoriale  $\vec{F} = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$  continuo nell'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice *conservativo* in E se valgono le seguenti condizioni (che sono tra loro equivalenti):

1) esiste una funzione scalare  $\varphi(x_1,...,x_n) \in C^1(E)$  tale che per ogni  $(x_1,...,x_n) \in E$  si ha  $\nabla \varphi(x_1,...,x_n) = \vec{F}(x_1,...,x_n)$ , cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} (x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_n) = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

- 2) l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha}$  è indipendente dall'arco di curva  $\gamma(A,B) \subset E$ ; dipende solo dagli estremi A e B;
- 3) l'integrale curvilineo (circuitazione)  $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{\alpha}$  su qualsiasi curva generalmente regolare semplice e chiusa  $\gamma \subset E$  è nullo.

Una condizione necessaria affinché un campo vettoriale  $\vec{F} = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$  sia conservativo nell'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è data dal seguente teorema:

**Teorema.** Sia  $\vec{F} = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n))$  un campo conservativo nell'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $\vec{F} \in C^1(E)$ . Allora, si ha  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$ , con  $i \neq j$ ,  $\forall (x_1, ..., x_n) \in E$ .

Le versioni in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  dello stesso teorema sono:

**Teorema** in  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$  un campo conservativo nell'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $\vec{F} \in C^1(E)$ . Allora, si ha  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in E$ .

**Teorema** in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\vec{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$  un campo conservativo nell'aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  e sia  $\vec{F} \in C^1(E)$ . Allora, si ha  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z)$ ,  $\frac{\partial X}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z)$  e  $\frac{\partial Y}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial y}(x,y,z)$   $\forall (x,y,z) \in E$ .

**Osservazione.** Il teorema dato fornisce una condizione <u>solo necessaria</u> affinché un campo sia conservativo in  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . In altre parole, per esempio in  $\mathbb{R}^2$ , è possibile che si abbia  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in E$  senza che il campo  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$  risulti conservativo in  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ . La condizione, come vedremo, diventa anche sufficiente se si aggiunge una ipotesi caratterizzante l'insieme E.

**Esempio 22.3.** Calcolare  $\oint_{\gamma} \frac{dx}{3x+4y+19} + \frac{dy}{y+6}$  dove  $\gamma$  è la circonferenza di eq.

$$x^2 + y^2 - 12x - 14y + 60 = 0$$
.

Mediante la tecnica del completamento dei quadrati riscriviamo l'eq. della circonferenza

$$x^{2} + y^{2} - 12x - 14y + 60 = 0 \implies (x - 6)^{2} + (y - 7)^{2} = 25$$
.

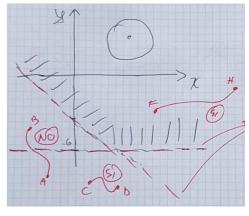
Quindi la circonferenza ha centro (6,7) e raggio 5. Una sua parametrizzazione è allora

$$\begin{cases} x = 6 + 5\cos t \\ y = 7 + 5\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Le rette di eq. 3x + 4y + 19 = 0 e y + 6 = 0 non intersecano la circonferenza; in caso contrario l'integrale curvilineo non avrebbe avuto senso. Dalla definizione si ha

$$\oint_{\gamma} \frac{dx}{3x + 4y + 19} + \frac{dy}{y + 6} =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left[ -\frac{5\sin t}{3(6 + 5\cos t) + 4(7 + 5\sin t) + 19} + \frac{5\cos t}{(7 + 5\sin t) + 6} \right] dt =$$



$$= \int_{0}^{2\pi} \left[ -\frac{5\sin t}{15\cos t + 20\sin t + 65} + \frac{5\cos t}{5\sin t + 13} \right] dt =$$

siccome la funzione integranda è periodica di periodo  $2\pi$  e l'intervallo di integrazione ha ampiezza pari al periodo, cambiando gli estremi di integrazione in modo tale che la loro differenza resti pari al periodo, il valore dell'integrale non cambia; quindi possiamo cambiare tali estremi in modo tale che l'intervallo di integrazione sia anche simmetrico rispetto all'origine,

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ -\frac{5\sin t}{15\cos t + 20\sin t + 65} + \frac{5\cos t}{5\sin t + 13} \right] dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ -\frac{\sin t}{3\cos t + 4\sin t + 13} + \frac{5\cos t}{5\sin t + 13} \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{3-3t^2}{1+t^2} + \frac{8t}{1+t^2} + 13} \frac{2}{1+t^2} \right) dt + \left[ \ln\left(5\sin t + 13\right) \right]_{-\pi}^{\pi} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{t}{8+4t+5t^2} \frac{2}{1+t^2} \right) dt = \text{in fratti semplici, dovrebbe venire} = \frac{2}{75}\pi.$$

Siccome la circuitazione su  $\gamma$  è non nulla, il campo vettoriale non è conservativo.

Abbiamo fornito una condizione solo necessaria affinché un campo vettoriale  $\vec{F} = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$  sia conservativo in un aperto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Definiremo ora una particolare caratteristica degli insiemi che, se soddisfatta, renderà la condizione, oltre che necessaria per la conservatività di un campo vettoriale in tali insiemi, anche sufficiente.

Intanto, nei prossimi due esempi, per capire le importanti e utili conseguenze che si hanno nel problema del calcolo di un integrale curvilineo di un campo vettoriale nel caso in cui quest'ultimo sia conservativo in un determinato insieme S, presupporremo che la caratteristica suddetta sia soddisfatta dall'insieme S.

**Esempio 23.1.** Calcolare 
$$\int_{\gamma(A,D)} \frac{6x+9y-1}{2x+3y+1} dx - \frac{6}{2x+3y+1} dy$$
 dove  $\gamma(A,D)$  è una curva

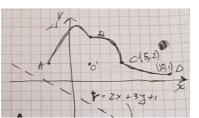
generalmente regolare così composta  $\gamma(A,D) = \gamma_1(A,B) \cup \gamma_2(B,C) \cup \gamma_3(C,D)$ , dove:

- $\gamma_1(A, B)$  è l'arco di parabola di eq.  $y = -x^2 + 2x + 5$  di estremi  $A \in B$ , dove A è il punto del II quadrante di ordinata  $2 \in B$  è il punto del I quadrante di ascissa 2;
- $\gamma_2(B,C)$  è il quarto di circonferenza di eq.  $x^2 + y^2 4x 4y 1 = 0$  di estremi  $B \in C$ , con C giacente nel I quadrante;
- $\gamma_3(C,D)$  è l'arco di iperbole di eq. xy = 10 di estremi C e D, dove D è il punto del I quadrante di ordinata 1.

La parabola  $\gamma_1$  ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y, vertice nel punto (1,6), ed è concava. L'ascissa dell'estremo A è

$$2 = -x^2 + 2x + 5 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_A = -1;$$

L'ordinata dell'estremo  $B \ e$   $y_B = -4 + 4 + 5 = 5$ .



L'eq. della circonferenza  $\gamma_2$  può essere scritta in modo equivalente  $(x-2)^2 + (y-2)^2 - 9 = 0$  ed ha, quindi, centro nel punto (2,2) e raggio 3. Allora, dovendo considerare il primo quarto di circonferenza a partire dal punto B, si ottiene C = (2+3,2) = (5,2).

L'ascissa dell'estremo D dell'iperbole è  $x_D = 10$ .

Osserviamo che l'intera curva  $\gamma(A,D)$  è tutta contenuta nel semipiano  $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y + 1 > 0\}$ .

Possiamo verificare facilmente che la condizione necessaria di conservatività del campo  $\vec{F}(x,y) = \left(X(x,y),Y(x,y)\right) = \left(\frac{6x+9y-1}{2x+3y+1}, -\frac{6}{2x+3y+1}\right) \text{ è soddisfatta in } S; \text{ infatti abbiamo}$   $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{9(2x+3y+1)-3(6x+9y-1)}{(2x+3y+1)^2} = \frac{12}{(2x+3y+1)^2};$   $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{12}{(2x+3y+1)^2};$ 

e quindi

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in S.$$
 (23.1)

Come premesso, presupponiamo che S abbia la caratteristica che rende la condizione (23.1) anche sufficiente affinché il campo vettoriale  $\vec{F}(x,y)$  risulti conservativo in S.

Allora, per calcolare l'integrale curvilineo si possono utilizzare due metodi:

I metodo: (*ricerca di un potenziale del campo vettoriale*). Tale metodo si basa sulla ricerca di una funzione scalare  $\varphi(x,y)$ , detta anche *potenziale* del campo conservativo  $\vec{F}(x,y)$ , tale che per ogni  $(x,y) \in S$  si abbia  $\nabla \varphi(x,y) = \vec{F}(x,y)$ , cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = X(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Y(x,y) \end{cases}$$

Dalla prima eq. del sistema consegue che  $\varphi(x,y)$  deve risultare, rispetto alla variabile x, una primitiva della funzione X(x,y) (la y si interpreta come costante), quindi si ha

$$\varphi(x,y) = \int \frac{6x+9y-1}{2x+3y+1} dx = \int \frac{3(2x+3y+1)-4}{2x+3y+1} dx = \int \left(3 - \frac{4}{2x+3y+1}\right) dx =$$

$$= 3x - 2\ln|2x+3y+1| + A(y)$$

In pratica abbiamo calcolato l'integrale indefinito, rispetto la variabile x, della funzione X(x,y), quindi la costante arbitraria è, in questo caso, interpretata dalla funzione A(y) considerando la variabile y costante in questa prima fase del metodo.

Analogamente, dalla seconda eq. del sistema consegue che  $\varphi(x,y)$  deve risultare, rispetto alla variabile y, una primitiva della funzione Y(x,y) (la x si interpreta come costante), quindi si ha

$$\varphi(x,y) = \int \frac{-6}{2x+3y+1} dy = -2\ln|2x+3y+1| + B(x).$$

Abbiamo ora calcolato l'integrale indefinito, rispetto la variabile y, della funzione Y(x,y), quindi la costante arbitraria è, in questo caso, interpretata dalla funzione B(x) considerando la variabile x costante in questa seconda fase del metodo.

Siccome la funzione  $\varphi(x,y)$ , così ottenuta nei due integrali, deve essere la stessa, si deve avere

$$3x - 2\ln|2x + 3y + 1| + A(y) = -2\ln|2x + 3y + 1| + B(x)$$

da cui segue 3x + A(y) = B(x)  $\Rightarrow$  A(y) = 0 e B(x) = 3x.

Quindi  $\varphi(x, y) = 3x - 2\ln|2x + 3y + 1|$ .

Allora, essendo il campo  $\vec{F}(x,y)$  conservativo in S e conoscendo un potenziale di  $\vec{F}(x,y)$ , si ha

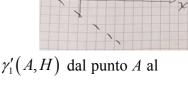
$$\int_{\gamma(A,D)} \frac{6x+9y-1}{2x+3y+1} dx - \frac{6}{2x+3y+1} dy = \varphi(D) - \varphi(A) =$$

$$= \varphi(10,1) - \varphi(-1,2) = 30 - 2\ln(24) + 3 + 2\ln(5) = 33 - 2\ln\left(\frac{24}{5}\right).$$

II metodo: (cambiamento della curva di integrazione). Tale metodo consiste nell'integrare il campo  $\vec{F}(x,y)$  su una curva generalmente regolare  $\gamma'(A,D)$  (ovviamente diversa e più semplice della curva  $\gamma(A,D)$  data dall'esercizio) che unisce gli stessi estremi A e D e sia tutta contenuta in S.

Possiamo, per esempio considerare la poligonale AHD dove H(10,2). Quindi abbiamo che  $\gamma'(A,D) = \gamma_1'(A,H) \cup \gamma_2'(H,D)$  dove  $\gamma_1'$  e  $\gamma_2'$  si possono parametrizzare nel modo seguente

$$\gamma_1'$$
:  $\begin{cases} x = t \\ y = 2 \end{cases}$   $t \in [-1,10]$  e  $\gamma_2'$ :  $\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 - t \end{cases}$   $t \in [0,1]$ 



Tali parametrizzazioni rendono concordi il verso di percorrenza delle curve  $\gamma_1'(A, H)$  dal punto A al punto H e  $\gamma_2'(H, D)$  dal punto H al punto D con la crescenza del parametro t rispettivamente negli intervalli [-1,10] e [0,1]. Quindi si ha

$$\int_{\gamma(A,D)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{\gamma(A,H)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} + \int_{\gamma_{2}(H,D)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{-1}^{10} \frac{6t+17}{2t+7} dt - \int_{0}^{1} \frac{6}{3t-27} dt =$$

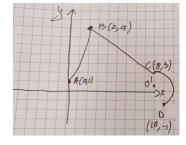
$$= \int_{-1}^{10} \left( 3 - \frac{4}{2t+7} \right) dt - 2 \int_{0}^{1} \frac{1}{t-9} dt = \left[ 3t - 2\ln|2t+7| \right]_{-1}^{10} - 2 \left[ \ln|t-9| \right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[ 30 - 2\ln(27) \right] - \left[ -3 - 2\ln(5) \right] - 2 \left[ \ln(8) \right] + 2 \left[ \ln(9) \right] = 33 - 2\ln\left(\frac{24}{5}\right).$$

Esempio 23.2. Calcolare 
$$\int_{\gamma(A,D)} \frac{2xy(y^2 - 144)}{(x^2 + y^2 - 144)^2} dx + \frac{x^2(x^2 - y^2 - 144)}{(x^2 + y^2 - 144)^2} dy \text{ dove } \gamma(A,D) \text{ è una}$$

curva generalmente regolare così composta  $\gamma(A,D) = \gamma_1(A,B) \cup \gamma_2(B,C) \cup \gamma_3(C,D)$ , dove:

- $\gamma_1(A,B)$  è l'arco di parabola di eq.  $y = x^2 + 2x + 1$  nel I quadrante di estremi  $A \in B$ , dove A ha ascissa nulla e B è il punto del I quadrante di ascissa 2;
- $\gamma_2(B,C)$  è il segmento di estremi  $B \in C$  di lunghezza  $6\sqrt{2}$  giacente nel I quadrante e parallelo alla retta di eq. x + y = 0;
- $\gamma_3(C,D)$  è la semicirconferenza di eq.  $x^2 + y^2 18x 2y + 77 = 0$  giacente sopra il diametro CD.



La parabola  $y_1$  ha l'asse di simmetria parallelo all'asse  $y_1$  ed è convessa. Si ha A(0,1). L'ordinata dell'estremo B è  $y_B = 4 + 4 + 1 = 9$ . Quindi B(2,9).

Il segmento  $\gamma_2(B,C)$  ha eq. y-9=-(x-2)  $\Rightarrow$  y=-x+11.

Sia  $C(x_C, y_C)$ , allora si ha  $y_C = -x_C + 11$ . Inoltre, dalle ipotesi, si ha

$$\sqrt{(x_C - 2)^2 + (y_C - 9)^2} = 6\sqrt{2} \implies (x_C - 2)^2 + (-x_C + 11 - 9)^2 = 72 \implies 2(x_C - 2)^2 = 72 \implies (x_C - 2) = 6 \implies x_C = 8$$
; quindi  $C(8,3)$ .

L'eq. della circonferenza  $\gamma_3$  può essere scritta in modo equivalente  $(x-9)^2 + (y-1)^2 = 5$  ed ha, quindi, centro nel punto (9,1) e raggio  $\sqrt{5}$ . Sia  $D(x_D,y_D)$ , allora, dalle formule delle coordinate del punto medio, si ha  $9 = \frac{x_D + 8}{2}$  e  $1 = \frac{y_D + 3}{2}$ , da cui D(10,-1).

Osserviamo che l'intera curva  $\gamma(A,D)$  è tutta contenuta nel cerchio  $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 144 < 0\}$  (questa osservazione è importante perché lungo la circonferenza di eq.  $x^2 + y^2 - 144 = 0$  il campo vettoriale non è definito).

Possiamo verificare che la condizione necessaria di conservatività del campo

$$\vec{F}(x,y) = (X(x,y),Y(x,y)) = \left(\frac{2xy(y^2 - 144)}{(x^2 + y^2 - 144)^2}, \frac{x^2(x^2 - y^2 - 144)}{(x^2 + y^2 - 144)^2}\right)$$
 è soddisfatta in S; infatti

abbiamo

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(6xy^2 - 288x\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2 - 2\left(2xy^3 - 288xy\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right)2y}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^4} = \frac{\left(6xy^2 - 288x\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2 - 2\left(2xy^3 - 288xy\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right)2y}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^4}$$

$$= \frac{\left(6xy^2 - 288x\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right) - 4y\left(2xy^3 - 288xy\right)}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^3} =$$

$$= \frac{6x^3y^2 + 6xy^4 - 864xy^2 - 288x^3 - 288xy^2 + 41472x - 8xy^4 + 1152xy^2}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^3} =$$

$$= \frac{6x^3y^2 - 2xy^4 - 288x^3 + 41472x}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^3};$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(4x^3 - 2xy^2 - 288x\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2 - 2x^2\left(x^2 - y^2 - 144\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right)2x}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^4} = \frac{\left(4x^3 - 2xy^2 - 288x\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right) - 4x^3\left(x^2 - y^2 - 144\right)}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^3} = \frac{6x^3y^2 - 2xy^4 - 288x^3 + 41472x}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^3};$$

e quindi

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in S.$$

Anche in questo caso, presupponiamo che S abbia la caratteristica che rende la condizione necessaria anche sufficiente affinché il campo vettoriale  $\vec{F}(x,y)$  risulti conservativo in S.

Determiniamo, in S, un potenziale  $\varphi(x,y)$  del campo conservativo  $\vec{F}(x,y)$ . Si ha che, per ogni  $(x,y) \in S$ ,  $\nabla \varphi(x,y) = \vec{F}(x,y)$ , cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = X(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Y(x,y) \end{cases}$$

Dalla prima eq. del sistema si ha

$$\varphi(x,y) = \int \frac{2xy(y^2 - 144)}{(x^2 + y^2 - 144)^2} dx = 2y(y^2 - 144) \int \frac{x}{(x^2 + y^2 - 144)^2} dx =$$

$$= y(y^2 - 144) \left(\frac{-1}{x^2 + y^2 - 144}\right) + A(y) = \frac{y(144 - y^2)}{x^2 + y^2 - 144} + A(y) = \frac{144y - y^3}{x^2 + y^2 - 144} + A(y).$$

Siccome integrare Y(x, y) rispetto a y è complicato procediamo in quest'altro modo per determinare la funzione A(y). Deriviamo  $\varphi(x, y)$  così trovata e uguagliamola alla funzione Y(x, y). Si ottiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(144 - 3y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 144\right) - \left(144y - y^3\right)\left(2y\right)}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2} + A'(y) = \frac{x^2\left(x^2 - y^2 - 144\right)}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2}$$

da cui segue

$$A'(y) = \frac{x^4 - x^2y^2 - 144x^2 - 144x^2 - 144y^2 + 20736 + 3x^2y^2 + 3y^4 - 432y^2 + 288y^2 - 2y^4}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2}$$

$$A'(y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 - 288x^2 + y^4 - 288y^2 + 20736}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2} = \frac{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2} = 1 \implies A(y) = y.$$

Quindi 
$$\varphi(x,y) = \frac{144y - y^3}{x^2 + y^2 - 144} + y = \frac{x^2y}{x^2 + y^2 - 144}$$
.

L'integrale curvilineo è allora

$$\int_{\gamma(A,D)} \frac{2xy(y^2 - 144)}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2} dx + \frac{x^2(x^2 - y^2 - 144)}{\left(x^2 + y^2 - 144\right)^2} dy = \varphi(D) - \varphi(A) = \varphi(10,-1) - \varphi(0,1) = \frac{100}{43}$$

Proviamo a calcolare l'integrale mediante il II metodo, ossia cambiando la curva di integrazione con una poligonale, tutta contenuta in S che unisce gli estremi A e D. Consideriamo il segmento AD di eq.  $y = -\frac{1}{5}x + 1$ . Tale segmento  $\gamma'(A, D)$  si può parametrizzare nel modo seguente

$$\gamma': \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{5}t + 1 \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Tale parametrizzazione rende concorde il verso di percorrenza del segmento  $\gamma'(A,D)$  dal punto A al punto D con la crescenza del parametro t nell'intervallo [0,10]. Quindi si ha

$$\int_{\gamma(A,D)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{\gamma'(A,D)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} =$$

$$= \int_{0}^{10} \left( \frac{2t\left(-\frac{1}{5}t+1\right)\left(\left(-\frac{1}{5}t+1\right)^{2}-144\right)}{\left(t^{2}+\left(-\frac{1}{5}t+1\right)^{2}-144\right)^{2}} - \frac{1}{5} \frac{t^{2}\left(t^{2}-\left(-\frac{1}{5}t+1\right)^{2}-144\right)}{\left(t^{2}+\left(-\frac{1}{5}t+1\right)^{2}-144\right)^{2}} \right) dt = \dots$$

Questi due esempi mostrano che se dobbiamo calcolare un integrale curvilineo, lungo una curva generalmente regolare  $\gamma$  di estremi A e B, di un campo vettoriale  $\vec{F}$  conservativo in un sottoinsieme S contenente interamente  $\gamma$ , allora è possibile integrare su un'altra curva  $\gamma'$  che congiunge gli stessi punti A e B generalmente regolare e interamente contenuta in S, per esempio una poligonale, le cui eq. parametriche rendono il calcolo dell'integrale notevolmente più semplice.

In alternativa è possibile determinare in S una funzione scalare (potenziale del campo vettoriale),  $\varphi(x,y)$  tale che, per ogni  $(x,y) \in S$ ,  $\nabla \varphi(x,y) = \vec{F}(x,y)$  e calcolare la differenza  $\varphi(B) - \varphi(A)$ .

Forniamo un ulteriore esempio.

**Esempio 23.3.** Calcolare  $\int_{\gamma(A,D)} (y \sin(2x) + \cos^2(y)) dx + (\sin^2(x) - x \sin(2y)) dy$  dove  $\gamma(A,D)$  è una curva generalmente regolare così composta  $\gamma(A,D) = \gamma_1(A,B) \cup \gamma_2(B,C) \cup \gamma_3(C,D)$ , dove:

- $\gamma_1(A, B)$  è l'arco di parabola di eq.  $y = x^2$  di estremi  $A \in B$  aventi ascisse rispettivamente  $0 \in 3$ ;
- $\gamma_2(B,C)$  è l'archi di circonferenza, di estremi B e C, centrata nell'origine di raggio  $3\sqrt{10}$ , dove C è il punto di intersezione la tale circonferenza e con la semiretta, nel IV quadrante, di eq. x+3y=0;
- $\gamma_3(C,D)$  è il segmento che congiunge i punti C e D(-1,-1).

Per calcolare tale integrale, non perdiamo tempo a capire come sia fatta  $\gamma(A,D)$  (e quindi a parametrizzare le curve che la compongono), perché tutto il piano  $R^2$ , in cui è definito il campo vettoriale, ha la caratteristica (che studieremo nella prossima lezione) che rende sufficiente la condizione di conservatività del campo. Il campo  $\vec{F}(x,y) = (X(x,y),X(x,y))$  verifica tale condizione di conservatività in  $R^2$ , infatti  $\forall (x,y) \in R^2$  si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \sin(2x) - 2\cos(y)\sin(y) = \sin(2x) - \sin(2y)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = 2\sin(x)\cos(x) - \sin(2y) = \sin(2x) - \sin(2y)$$

da cui  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$  in R<sup>2</sup>. Allora possiamo calcolare l'integrale determinando un

potenziale del campo oppure cambiando la curva  $\gamma(A,D)$  con un'altra più semplice  $\gamma'(A,D)$  che congiunge gli stessi estremi A e D. Utilizziamo questo secondo metodo e consideriamo la poligonale  $\gamma'(A,D) = \gamma_1'(A,P) \cup \gamma_2'(P,D)$  dove  $\gamma_1'(A,P)$  e  $\gamma_2'(P,D)$  sono i segmenti di estremi rispettivamente A, P e P, D che si possono parametrizzare nel modo seguente

$$\gamma_1'$$
:  $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$   $t \in [-1, 0]$  e  $\gamma_2'$ :  $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$   $t \in [-1, 0]$ .

Tenendo conto del verso di percorrenza sui segmenti che va da A a P su  $\gamma'_1$  e da P a D su  $\gamma'_2$  e delle parametrizzazioni considerate, abbiamo

$$\int_{\gamma(A,D)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{\gamma'_1(A,P)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} + \int_{\gamma'_2(P,D)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} \left(\sin^2\left(-1\right) + \sin\left(2t\right)\right) dt = \int_0^{-1} dt + \int_0^{-1} d$$

$$=-1-\sin^2\left(-1\right)-\left[\frac{\cos\left(2t\right)}{2}\right]^{-1}=-1-\sin^2\left(-1\right)-\frac{\cos\left(-2\right)}{2}+\frac{1}{2}=-\sin^2\left(1\right)-\frac{\cos\left(2\right)}{2}-\frac{1}{2}$$

In quest'ultimo esempio calcoliamo un integrale curvilineo in  $\mathbb{R}^3$ .

**Esempio 23.4.** Dati nello spazio  $\mathbb{R}^3$  i punti A(1,0,2), B(1,2,1) e C(-1,3,4), calcolare  $\int_{\gamma(A,C)} -\frac{y+2z}{(x-2)^2} dx + \frac{1}{x-2} dy + \frac{2}{x-2} dz \text{ nei due casi in cui } \gamma \text{ è:}$ 

- l'arco ABC di circonferenza passante per i tre punti dati;
- la spezzata ABC.

Per calcolare tale integrale, non perdiamo tempo a capire come siano fatte le curve  $\gamma(A,C)$  assegnate, perché si può considerare un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2\}$  del dominio del campo vettoriale, che ha la caratteristica che rende sufficiente la condizione di conservatività del campo. Il campo  $\vec{F}(x,y,z) = (X(x,y,z),X(x,y,z),Z(x,y,z))$  verifica tale condizione di conservatività in S, infatti  $\forall (x,y,z) \in S$  si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{(x-2)^2};$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{2}{(x-2)^2};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial Z}{\partial y}(x, y, z) = 0.$$

Allora possiamo calcolare l'integrale determinando un potenziale del campo oppure cambiando la curva  $\gamma(A,C)$  con un'altra più semplice  $\gamma'(A,C)$  ch congiunge gli stessi estremi A e C. Utilizziamo prima questo secondo metodo e consideriamo la poligonale  $\gamma'(A,C)=\gamma_1'(A,P_1)\cup\gamma_2'(P_1,P_2)\cup\gamma_3'(P_2,C)$  dove  $\gamma_1'(A,P_1)$ ,  $\gamma_2'(P_1,P_2)$  e  $\gamma_3'(P_2,C)$  sono i segmenti di estremi rispettivamente  $AP_1$ ,  $P_1P_2$  e  $P_2C$  che si possono parametrizzare nel modo seguente

$$\gamma_1' : \begin{cases} x = t \\ y = 0 & t \in [-1, 1] \end{cases} \qquad \gamma_2' : \begin{cases} x = -1 \\ y = t & t \in [0, 3] \end{cases} \quad \text{e} \qquad \gamma_3' : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 & t \in [2, 4]. \end{cases}$$

Tenendo conto del verso di percorrenza sui segmenti e delle parametrizzazioni considerate, abbiamo

$$\int_{\gamma(A,C)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{\gamma'_1(A,P_1)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} + \int_{\gamma'_2(P_1,P_2)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} + \int_{\gamma'_2(P_2,C)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{2}^{4} dt = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{2}^{4} dt = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{2}^{4} dt = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{0}^{4} dt = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{0}^{4} dt = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{0}^{4} dt = 4 \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{0}^{4} dt = 4 \int_{0}^{1} \frac{1}{(t-2)^2} dt - \frac{1}{3} \int_{0}^{3} dt - \frac{2}{3} \int_{0}^{4} dt - \frac{2}{3} \int_{0$$

Proviamo a calcolare l'integrale con il metodo del potenziale.

Determiniamo una funzione scalare  $\varphi(x,y,z)$ , potenziale del campo conservativo  $\vec{F}(x,y,z)$ , tale che per ogni  $(x,y,z) \in S$  si abbia  $\nabla \varphi(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$ , cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = X(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = Y(x, y, z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = Z(x, y, z) \end{cases}$$

Dalla prima eq. del sistema consegue che  $\varphi(x, y, z)$  deve risultare, rispetto alla variabile x, una primitiva della funzione X(x, y, z) (la y e la z si interpretano come costanti), quindi si ha

$$\varphi(x, y, z) = \int -\frac{y+2z}{(x-2)^2} dx = \frac{y+2z}{(x-2)} + A(y, z)$$

In pratica abbiamo calcolato l'integrale indefinito, rispetto la variabile x, della funzione X(x,y,z), quindi la costante arbitraria è, in questo caso, interpretata dalla funzione A(y,z) considerando le variabili y e z costanti in questa prima fase del metodo.

Analogamente, dalla seconda eq. del sistema consegue che  $\varphi(x, y, z)$  deve risultare, rispetto alla variabile y, una primitiva della funzione Y(x, y, z) (la x e la z si interpretano come costanti), quindi si ha

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{1}{(x-2)} dy = \frac{y}{(x-2)} + B(x,z);$$

Infine, dalla terza eq. del sistema consegue che  $\varphi(x, y, z)$  deve risultare, rispetto alla variabile z, una primitiva della funzione Z(x, y, z) (la x e la y si interpretano come costanti), quindi si ha

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{2}{(x-2)} dz = \frac{2z}{(x-2)} + C(x,y);$$

Uguagliando le espressioni della funzione  $\varphi(x,y,z)$ , così ottenuta nei tre integrali, si ha

$$\frac{y+2z}{(x-2)} + A(y,z) = \frac{y}{(x-2)} + B(x,z) = \frac{2z}{(x-2)} + C(x,y)$$

da cui segue 
$$A(y,z) = 0$$
,  $B(x,z) = \frac{2z}{x-2}$  e  $C(x,y) = \frac{y}{x-2}$ .

Quindi 
$$\varphi(x, y, z) = \frac{y + 2z}{(x - 2)}$$
.

Allora, essendo il campo  $\vec{F}(x,y,z)$  conservativo in S e conoscendo il potenziale di  $\vec{F}(x,y,z)$ , si ha

$$\int_{\gamma(A,C)} -\frac{y+2z}{(x-2)^2} dx + \frac{1}{x-2} dy + \frac{2}{x-2} dz = \varphi(C) - \varphi(A) =$$

$$= \varphi(-1,3,4) - \varphi(1,0,2) = \frac{3+8}{-3} - \frac{4}{-1} = 4 - \frac{11}{3} = \frac{1}{3}.$$

Abbiamo visto le importanti e utili conseguenze che si hanno nel problema del calcolo di un integrale curvilineo di un campo vettoriale (definito in  $D_{\vec{F}}$ ), nel caso in cui quest'ultimo sia conservativo in un determinato sottoinsieme  $S \subseteq D_{\vec{F}}$ . Allo scopo di fornire una condizione sufficiente affinché un campo vettoriale  $\vec{F} = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$  sia conservativo in S, forniremo, in questa lezione, un risultato che, sotto determinate condizioni, ci consentirà di trasformare un integrale doppio in un integrale curvilineo e viceversa. Tale risultato, oltre ad essere

indispensabile per dimostrare la suddetta condizione sufficiente di conservatività di un campo vettoriale in un sottoinsieme S, ha anche conseguenze molto utili, come vedremo, nelle applicazioni.

Per enunciare tale risultato occorrono le seguenti definizioni

**Definizione.** Dominio regolare (nel piano) rispetto all'asse x: è un dominio D normale rispetto all'asse x cioè,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b \quad e \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

dove le funzioni, delimitanti la variabile y,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  sono, non solo continue in [a,b], ma di classe  $C^1[a,b]$  cioè derivabili con derivata continua in [a,b].

**Esempio 24.1.** Gli insiemi  $D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \le x \le 2 \text{ e } -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \right\}$  e  $D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \right\}$  che corrispondono, rispettivamente, al cerchio delimitato dalla disequazione  $x^2 + y^2 \le 4$  e al semicerchio superiore, sono domini normali ma non regolari rispetto all'asse x, perché la funzione  $\beta(x) = \sqrt{4-x^2}$  non è derivabile negli estremi  $\pm 2$  (infatti le rette tangenti alla circonferenza nei punti (-2,0) e (2,0) sono parallele all'asse y). Analogamente di può definire

**Definizione.** Dominio regolare (nel piano) rispetto all'asse y: è un dominio D normale rispetto all'asse y cioè,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \le y \le d \quad \text{e} \quad \delta(y) \le x \le \gamma(y)\}$$

dove le funzioni, delimitanti la variabile x,  $\delta(y)$  e  $\gamma(y)$  sono, non solo continue in [c,d], ma di classe  $C^1[c,d]$  cioè derivabili con derivata continua in [c,d].

Diamo l'ulteriore definizione

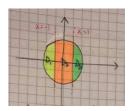
**Definizione.** Dominio regolare (nel piano): è un dominio D che si può decomporre in un numero finito di domini  $D_1, ..., D_n$  ciascuno dei quali risulta regolare rispetto ad uno degli assi coordinati e tale che la sua frontiera  $\partial D$  è costituita da un numero finito di curve regolari aventi in comune, a due a due, al più i loro punti estremi.

**Esempio 24.2.** Il cerchio D delimitato dalla disequazione  $x^2 + y^2 \le 4$  è un dominio normale nel piano, infatti esso si può decomporre in tre domini, cioè  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ , con

$$D_{1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2} / -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3} \quad \text{e} \quad -\sqrt{4 - y^{2}} \le x \le -1 \right\}$$

$$D_{2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2} / -1 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad -\sqrt{4 - x^{2}} \le y \le \sqrt{4 - x^{2}} \right\}$$

$$D_{3} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2} / -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3} \quad \text{e} \quad 1 \le x \le \sqrt{4 - y^{2}} \right\}$$



dove  $D_1$  e  $D_3$  risultano regolari rispetto all'asse y e  $D_2$  risulta regolare rispetto all'asse x; inoltre la frontiera di D è costituita interamente da una curva regolare (la circonferenza di eq.  $x^2 + y^2 = 4$ ).

Enunciamo ora il risultato che consente di trasformare un integrale doppio in un integrale curvilineo e viceversa

**Teorema di Green (nel piano).** Sia D un dominio regolare in  $\mathbb{R}^2$  e siano X(x,y) e Y(x,y) due funzioni scalari di classe  $C^1(D)$ , cioè continue con derivate parziali continue in D. Allora valgono le seguenti formule

$$\oint_{\partial D} X(x,y) dx = -\iint_{D} \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) dxdy \quad e \quad \oint_{\partial D} Y(x,y) dy = \iint_{D} \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) dxdy$$

dove con il simbolo  $+\partial D$  si intende la frontiera  $\partial D$  del dominio regolare D percorsa in senso positivo che, convenzionalmente, è il verso che deve percorrere un osservatore muovendosi su  $\partial D$  per avere il dominio sulla sua sinistra.

Le due relazioni fornite dal teorema si dicono formule di Green nel piano. Sommando membro a membro tali formule si ottiene la seguente formula

$$\oint_{\partial D} X(x,y) dx + Y(x,y) dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$
 (24.1)

nota come la formula della divergenza nel piano.

Vediamo qualche applicazione di tali formule. Nel prossimo esempio si sfrutta la (24.1) per calcolare la circuitazione, cioè l'integrale lungo una curva regolare chiusa di un campo vettoriale molto complicato.

Esempio 24.3. Calcolare 
$$\oint_{\gamma} \left[ 2x^2y + 12xy + \frac{y^2}{\sqrt{100 - x^2}} - 6xy \ln(y^2 + 16) - 48x \arctan\left(\frac{y}{4}\right) \right] dx + \left[ x^3 + 12y + 2y \arcsin\left(\frac{x}{10}\right) - 3x^2 \ln(y^2 + 16) \right] dy \text{ dove } \gamma \text{ è l'ellisse di eq. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ percorsa in senso antiorario.}$$

Risulta  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = x^2$ , da cui si deduce che il campo non è conservativo e che conviene trasformare l'integrale curvilineo in integrale doppio mediante la formula della divergenza (24.1). Allora, considerato il dominio regolare  $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1 \right\}$  e la trasformazione di coordinate  $\begin{cases} x = 3\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases}$   $(\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ , si ha

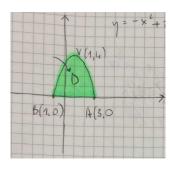
$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_{D} x^{2} dx dy = 54 \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} t \, dt \int_{0}^{1} \rho^{3} d\rho = \frac{27}{4} \int_{0}^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{27}{4} \left[ \vartheta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{0}^{2\pi} = \frac{27\pi}{2}.$$

Nel prossimo esempio, vedremo come sfruttare la formula della divergenza anche per calcolare l'integrale curvilineo su una curva aperta.

**Esempio 24.4.** Calcolare 
$$\int_{\gamma(A,B)} \left[ 2x^2y^2 + 5x \operatorname{sett sinh} y + x^4 (5y+1) \right] dx + \left[ 2x^3y + \frac{5x^2}{2\sqrt{y^2+1}} + x^5 \right] dy$$

dove  $\gamma$  è l'arco di parabola di eq.  $y = -x^2 + 2x + 3$ .

L'espressione del campo vettoriale è troppo complicata per tentare di calcolare l'integrale. Mentre risulta  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = 2x^2y$ . Non potendo applicare la formula della divergenza su una curva aperta, considero la curva chiusa costituita dalla parabola percorsa dal punto A(3,0) al punto B(-1,0) e dal segmento BA percorso dal punto B(-1,0) al punto A(3,0). Detto D il dominio avente come frontiera la curva chiusa così costruita, dalla formula della divergenza (24.1) si ha



$$\oint_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_D 2x^2 y dx dy .$$

Ma  $\oint_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} + \int_{\gamma'(B,A)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$ , dove il primo integrale a secondo membro è quello

proposto dall'esercizio, mentre il secondo va calcolato sul segmento  $\gamma'(B,A)$  le cui eq. parametriche sono

$$\gamma': \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [-1,3].$$

Quindi abbiamo

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_{D} 2x^{2}y dx dy - \int_{\gamma'(B,A)} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = 2\int_{-1}^{3} x^{2} dx \int_{0}^{-x^{2}+2x+3} y dy - \int_{-1}^{3} t^{4} dt =$$

$$\int_{-1}^{3} x^{2} dx \left[ y^{2} \right]_{0}^{-x^{2}+2x+3} - \left[ \frac{t^{5}}{5} \right]_{-1}^{3} =$$

$$= \int_{-1}^{3} x^{2} \left( -x^{2} + 2x + 3 \right)^{2} dx - \left( \frac{3^{5}}{5} + \frac{1}{5} \right) = \int_{-1}^{3} \left( x^{6} + 9x^{2} - 4x^{5} - 2x^{4} + 12x^{3} \right) dx - \frac{244}{5} =$$

$$= \left[ \frac{x^{7}}{7} + 3x^{3} - \frac{2}{3}x^{6} - \frac{2}{5}x^{5} + 3x^{4} \right]_{-1}^{3} - \frac{244}{5} = \frac{508}{105}.$$

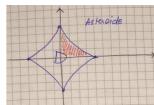
La formule di Green possono essere utilizzate anche nel modo inverso, per esempio per calcolare l'area di un dominio regolare nel piano. L'obiettivo è quello di trasformare un integrale doppio in integrale curvilineo. Vediamo tale utilizzo nel prossimo esempio.

**Esempio 24.5.** Calcolare l'area del dominio D delimitato dall'asteroide di eq. parametriche  $\int x = a \cos^3 t$ 

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'area del dominio regolare D è data dall'integrale doppio  $\iint_D dxdy$ .

Si può allora definire un campo vettoriale  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$  tale che



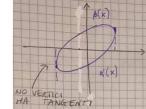
 $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = 1, \text{ cosicch\'e l'integrale doppio pu\'o essere sostituito, mediante la formula di Green, dall'integrale curvilineo } \oint_{+\partial D} X(x,y) dx + Y(x,y) dy, \text{ dove } +\partial D \text{ \'e l'asteroide percorso in senso antiorario. Possiamo porre a tal proposito } \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2} \text{ e } \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{2}. \text{ Allora si ha}$ 

$$area(D) = \iint_{D} dxdy = \frac{1}{2} \oint_{+\partial D} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (3a^{2} \sin^{4} t \cos^{2} t + 3a^{2} \sin^{2} t \cos^{4} t) dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_{0}^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{2} \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{\sin(2t)}{2} \right)^2 dt = \frac{3a^2}{8} \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos 4t}{2} \right) dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

**Esempio 24.6.** Calcolare l'area del dominio  $D = \{(x, y) \in R^2 / 4x^2 - 12xy + 25y^2 - 49 \le 0\}$ .

Anche in questo caso conviene utilizzare la formula della divergenza al contrario. L'area del dominio regolare D è data, quindi, dall'integrale doppio  $\iint_D dxdy$ . Come nel caso precedente consideriamo il campo vettoriale  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$ , con  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2}$  e  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{2}$ , cosicché  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = 1$ . Quindi per il teorema della divergenza si ha



$$area(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2} \oint_{+\partial D} -ydx + xdy$$
 dove  $+\partial D$  è l'ellisse di eq.  $4x^2 - 12xy + 25y^2 - 49 = 0$ 

percorsa in senso antiorario. Consideriamo una possibile parametrizzazione dell'ellisse, mediante la tecnica del completamento dei quadrati. Si ha

$$4x^2 - 12xy + 25y^2 - 49 = 0$$
  $\Rightarrow$   $(2x - 3y)^2 + 16y^2 = 49$   $\Rightarrow$   $(2x - 3y)^2 + (4y)^2 = (7)^2$ . Quindi possiamo parametrizzare l'ellisse nel modo seguente

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7\cos t \\ 4y = 7\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \implies \begin{cases} 2x - 3y = 7\cos t \\ 4y = 7\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \implies \begin{cases} x = \frac{7}{2}\cos t + \frac{21}{8}\sin t \\ y = \frac{7}{4}\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Allora risulta

$$area(D) = \iint_{D} dx dy = \frac{1}{2} \oint_{+\partial D} -y dx + x dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left( -\frac{7}{4} \sin t \right) \left( -\frac{7}{2} \sin t + \frac{21}{8} \cos t \right) + \left( \frac{7}{2} \cos t + \frac{21}{8} \sin t \right) \left( \frac{7}{4} \cos t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left( \frac{49}{8} \sin^{2} t - \frac{147}{32} \sin t \cos t \right) + \left( \frac{49}{8} \cos^{2} t + \frac{147}{32} \sin t \cos t \right) dt = \frac{49}{8} \pi.$$

**Esempio 24.7.** Calcolare l'integrale doppio  $\iint_D xydxdy$  dove D è il dominio delimitato dalla curva

chiusa di eq. parametriche 
$$\begin{cases} x = t - t^3 \\ y = t - t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Secondo questa parametrizzazione, la curva (frontiera del dominio D) viene percorsa in senso orario. Per verificare questo occorre assegnare al parametro t valori via via crescenti e studiare il movimento del punto mobile su tale curva. Utilizziamo la formula della divergenza al contrario; determiniamo quindi un campo vettoriale  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$ , tale che  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = xy$ . Possiamo considerare, per esempio,  $Y(x,y) = \frac{x^2y}{2}$  e X(x,y) = 0. Si

 $\iint_D xydxdy = \frac{1}{2} \oint_{+\partial D} x^2ydy \text{ dove } +\partial D \text{ è la frontiera di } D \text{ percorsa in senso antiorario. Allora, tenendo conto che il verso di percorrenza della frontiera di } D \text{ secondo la parametrizzazione è contrario a quello } +\partial D \text{ stabilito dalla formula della divergenza, si ha}$ 

$$\iint_{D} xydxdy = \frac{1}{2} \oint_{+\partial D} x^{2}ydy = \frac{1}{2} \int_{1}^{0} (t - t^{3})^{2} (t - t^{2})(1 - 2t)dt = \frac{1}{2} \int_{1}^{0} (t^{3} - 3t^{4} - 3t^{8} + 2t^{9} + 6t^{6} - 3t^{7})dt = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{6}{7} + \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{1680}.$$

Concludiamo la lezione enunciando la condizione sufficiente affinché un campo vettoriale definito in  $D_{\vec{k}} \subseteq \mathbb{R}^2$  sia conservativo in un sottoinsieme  $S \subseteq D_{\vec{k}}$ .

Diamo le seguenti definizioni

ha

**Definizione.** *insieme connesso*. Un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice connesso se per ogni coppia di punti A e B dell'insieme S, esiste una curva generalmente regolare  $\gamma \subseteq S$  tutta contenuta in S di estremi A e B.

**Definizione.** insieme semplicemente connesso. Un insieme connesso  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice semplicemente connesso se ogni curva  $\gamma \subseteq S$  generalmente regolare, semplice, chiusa, giacente nell'insieme S, è la frontiera di un dominio regolare tutto contenuto in S.

Esempio 24.8. La corona circolare è un insieme connesso, ma non semplicemente connesso.

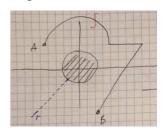
**Teorema** in  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$  un campo vettoriale definito in  $D_{\vec{F}} \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $S \subseteq D_{\vec{F}}$  un sottoinsieme semplicemente connesso tale che  $\vec{F} \in C^1(S)$ . Allora, se  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in S$ , il campo  $\vec{F}$  è conservativo in S.

**Teorema** in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\vec{F} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$  un campo vettoriale definito in  $D_{\vec{F}} \subseteq \mathbb{R}^3$  e sia  $S \subseteq D_{\vec{F}}$  un sottoinsieme semplicemente connesso tale che  $\vec{F} \in C^1(S)$ . Allora, se

$$\frac{\partial X}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial X}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial Y}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial y}(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in S, \quad \text{il campo } \vec{F} \text{ è conservativo in } S.$$

**Esempio 24.9.** Il campo vettoriale  $\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}\right)$ , definito in  $D_{\vec{F}} = \left\{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 > 9\right\}$ , verifica in  $D_{\vec{F}}$  la condizione necessaria di conservatività, infatti  $\forall (x, y) \in D_{\vec{F}}$  risulta  $\frac{\partial X}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2 - 9)\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ . Tuttavia, non è detto che sia conservativo in  $D_{\vec{F}}$ , perché  $D_{\vec{F}}$  non è semplicemente connesso.

Possiamo, allora considerare un semiretta r uscente dall'origine e il sottoinsieme  $S=D_{\vec{F}}-r$ . Il sottoinsieme S così costruito è semplicemente connesso e quindi  $\vec{F}$  risulta conservativo in S. Nel costruire S bisogna considerare una retta che non tagli la curva sulla quale si vuole integrale  $\vec{F}$ .



# INTEGRALI CURVILINEI IN $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

### PARAMETRIZZAZIONE DELLE CURVE REGOLARI

$$\gamma: \vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & t \in [a, b] \text{ in } \mathbb{R}^3. \\ z = z(t) \end{cases}$$

### LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

lunghezza 
$$(\gamma) = \int_{a}^{b} \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2} + \left[z(t)\right]^{2}} dt$$
 in  $\mathbb{R}^{3}$ 

### INTEGRALE CURVILINEO DI UNA FUNZIONE SCALARE

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y) ds = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t)) \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2}} dt \quad \text{in } \mathbb{R}^{2}$$

$$\int_{\gamma(A,B)} f(x,y,z) ds = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t),z(t)) \sqrt{\left[x'(t)\right]^{2} + \left[y'(t)\right]^{2} + \left[z'(t)\right]^{2}} dt \quad \text{in } \mathbb{R}^{3}$$

## MASSA DI UNA PORZIONE DI SUPERF. OMOGENEA E NON

$$massa(\gamma) = \int_{\gamma(A,B)} \mu(x,y) ds$$
 (n.o. in  $\mathbb{R}^2$ ) massa $(\gamma) = \mu \int_{\gamma(A,B)} ds = \mu \operatorname{lunghezza}(\gamma)$  (o. in  $\mathbb{R}^3$ )

$$massa(\gamma) = \int_{\gamma(A,B)} \mu(x,y,z) ds$$
 (n.o. in  $\mathbb{R}^2$ ) massa $(\gamma) = \mu \int_{\gamma(A,B)} ds = \mu \operatorname{lunghezza}(\gamma)$  (o. in  $\mathbb{R}^3$ )

#### COORD. DEL BARICENTRO G DI UNA PORZIONE DI SUPERF. OMOGENEA E NON

$$G_{x} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} x\mu(x,y)ds}{massa(\gamma)}, \quad G_{y} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} y\mu(x,y)ds}{massa(\gamma)} \quad \text{(n.o. in } \mathbb{R}^{2}\text{)}$$

$$G_{x} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} xds}{\text{lunghezza}(\gamma)}, \quad G_{y} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} yds}{\text{lunghezza}(\gamma)}$$
 (o. in  $\mathbb{R}^{2}$ )

$$G_{x} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} x\mu(x,y,z)ds}{massa(\gamma)}, \quad G_{y} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} y\mu(x,y,z)ds}{massa(\gamma)}, \quad G_{z} = \frac{\int\limits_{\gamma(A,B)} z\mu(x,y,z)ds}{massa(\gamma)} \quad (\text{n.o. in } \mathbb{R}^{3})$$

$$G_{x} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} xds}{\text{lunghezza}(\gamma)}, \quad G_{y} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} yds}{\text{lunghezza}(\gamma)} \quad \text{e} \quad G_{z} = \frac{\int_{\gamma(A,B)} zds}{\text{lunghezza}(\gamma)} \quad \text{(o. in } \mathbb{R}^{3})$$

(in 
$$\mathbb{R}^2$$
)  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$ 

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} = \pm \int_{a}^{b} \left[ X(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

(in 
$$\mathbb{R}^3$$
)  $\vec{F} = \left(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\right)$ 

$$\int_{\gamma(A,B)} \vec{F} \, d\vec{\alpha} = \pm \int_a^b \left[X(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Y(x(t),y(t)) \cdot y'(t) + Z(x(t),y(t)) \cdot z'(t)\right] dt$$

a secondo membro bisogna considerare il segno positivo se il verso di percorrenza scelto sull'arco di curva che va da A a B è concorde con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [a,b], mentre bisogna considerare il segno negativo (o cambiare l'ordine degli estremi di integrazione) se il verso di percorrenza scelto sull'arco di curva che va da A a B è contrario con il modo di crescere del parametro t nell'intervallo [a,b].

### TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

**Teorema di Green (nel piano).** Sia D un dominio regolare in  $\mathbb{R}^2$  e siano X(x,y) e Y(x,y) due funzioni scalari di classe  $C^1(D)$ , cioè continue con derivate parziali continue in D. Allora

$$\oint_{\partial D} X(x,y) dx + Y(x,y) dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$

dove con il simbolo  $+\partial D$  si intende la frontiera  $\partial D$  del dominio regolare D percorsa in senso positivo che, convenzionalmente, è il verso che deve percorrere un osservatore muovendosi su  $\partial D$  per avere il dominio sulla sua sinistra.

Si usa essenzialmente per calcolare l'area di un dominio regolare considerando un campo vettoriale  $\vec{F} = \left(X(x,y),Y(x,y)\right)$  tale che  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = 1$ . Per esempio  $\vec{F} = (0,x)$ , oppure  $\vec{F} = \left(-\frac{y}{2},\frac{x}{2}\right)$ .

### CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

**Teorema** in  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\vec{F} = (X(x,y),Y(x,y))$  un campo vettoriale definito in  $D_{\vec{F}} \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $S \subseteq D_{\vec{F}}$  un sottoinsieme semplicemente connesso. Allora, se  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$ ,  $\forall (x,y) \in S$ , il campo  $\vec{F}$  è conservativo in S.

**Teorema** in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\vec{F} = (X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$  un campo vettoriale definito in  $D_{\vec{F}} \subseteq \mathbb{R}^3$  e sia  $S \subseteq D_{\vec{F}}$  un sottoinsieme semplicemente connesso. Allora, se  $\frac{\partial X}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,z)$ ,  $\frac{\partial X}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Z}{\partial y}(x,y,z)$ ,  $\forall (x,y,z) \in S$ , il campo  $\vec{F}$  è conservativo in S.

Negli esercizi in cui è richiesto il calcolo di un integrale curvilineo lungo una curva  $\gamma$  di estremi A e B di un campo vettoriale conservativo nell'insieme  $S \subseteq D_{\bar{F}}$  (contenente la curva), si può cambiare la curva  $\gamma$  con un'altra (per esempio una poligonale) che unisce sempre gli stessi estremi A e B. Oppure considerare un potenziale scalare.