INTEGRALI IMPROPRI

La teoria dell'integrazione di una funzione *f* continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ si può estendere sostituendo l'ipotesi di continuità in $[a,b]$ della funzione f con quella della limitatezza. In tal caso si affronta il problema dell'integrazione secondo Riemann.

Consideriamo il caso particolare di una funzione continua a tratti in un intervallo $[a,b]$, cioè di una funzione limitata in $[a,b]$ ed ivi continua ad eccezione di un numero finito di punti dell'intervallo in cui si hanno discontinuità di prima o terza specie. Supponiamo, per semplicità (ma il discorso si può facilmente generalizzare) che la funzione sia limitata in $[a,b]$ ed ivi continua tranne che nel punto $c \in (a,b)$. Si può dimostrare che esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{h\to 0^+} \int_a^{c-h} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^+} \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx .$$

La funzione *f* si dice allora integrabile in $[a,b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+} \left\{ \int_a^{c-h} f(x)\,dx + \int_{c+h}^{b} f(x)\,dx \right\}.$$

L'integrale così ottenuto coincide con l'integrale secondo Riemann della funzione *f* nell'intervallo $[a,b]$.

Qualora la funzione sia limitata in $[a,b]$ e continua in $[a,b)$ (oppure in $(a,b]$), allora si può dimostrare che esiste finito il seguente limite

$$\lim_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x)\,dx \quad \text{(oppure} \quad \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)\,dx \text{)}.$$

Anche in tal caso la funzione *f* si dice integrabile in $[a,b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x)\,dx \quad \text{(oppure} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)\,dx \text{)}.$$

Esempio 1. Calcolare $\int_0^1 f(x)\,dx$, dove $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

Questa teoria si può ulteriormente generalizzare rinunciando all'ipotesi di limitatezza della funzione nell'intervallo.

INTEGRALI IMPROPRI DI 2 SPECIE

Sia *f* una funzione continua nell'intervallo $[a,b)$ (oppure $(a,b]$, oppure $[a,c)\cup(c,b]$) ed ivi illimitata. Vediamo un esempio

Esempio 2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, oppure $g(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

Si può osservare che entrambe le funzioni sono continue in $(0,1]$ ed illimitate in qualsiasi intorno destro di 0, ma con la differenza che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \nexists$.

Se le due funzioni vengono estese anche in 0, per esempio, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x\in(0,1]\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$, e $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\in(0,1]\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$, allora il punto $x=0$ si dice punto singolare per le funzioni, cioè un punto del dominio della funzione tale che in ogni suo intorno la funzione risulta illimitata. Le funzioni *f* e g sono funzioni generalmente continue in $[0,1]$.

Definizione 1. Un funzione si dice generalmente continua in un insieme *S* se in ogni intervallo limitato di *S* risulta continua tranne che per un numero finito di punti (che possono essere di singolarità).

Definizione 2. Si dice che la funzione *f* ha integrale in senso improprio (o generalizzato) convergente in $[a,b]$ se esiste finito il limite $\lim_{h\to0^+}\int_a^{b-h} f(x)dx$. In tal caso si pone per definizione $\int_a^b f(x)dx=\lim_{h\to0^+}\int_a^{b-h} f(x)dx$.

Se il limite $\lim_{h\to0^+}\int_a^{b-h} f(x)dx$ è uguale $\pm\infty$ oppure non esiste, allora l'integrale improprio si dice divergente oppure irregolare.
Nel caso in cui l'integrale improprio della funzione *f* converge in $[a,b]$, si dirà che la funzione *f* è integrabile in $[a,b]$.

Esempio 3. Calcolare $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Esempio 4. Calcolare $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx$.

Esempio 5. Calcolare $\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx$.

Se la funzione *f* è continua in $[a,b)$, ivi non negativa e illimitata allora, se *f* è integrabile, si dice che la regione del sottografico di *f* in $[a,b)$ risulta quadrabile e il valore del limite rappresenta la misura dell'area, mentre, se l'integrale improprio non esiste o diverge la regione del sottografico di *f* in $[a,b)$ risulta non quadrabile.

Esempio 6. Calcolare $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$.

Esempio 7. Calcolare $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Esempio 8. Calcolare $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.

Esempio 9. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α, $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$.

L'integrale improprio dell'esempio 9 risulta convergente se $0 < \alpha < 1$, mentre risulta divergente se $\alpha \geq 1$. Questo risultato è fondamentale per lo studio del carattere di un integrale improprio infatti, come vedremo, può essere sfruttato nei criteri di convergenza del confronto o del confronto asintotico per gli integrali impropri analogamente a come si fa per le serie numeriche.

Teorema 1. Sia *f* continua in $[a,b)$. Se $|f|$ continua in $[a,b)$ ha integrale improprio convergente in $[a,b]$, allora anche *f* ha integrale improprio convergente in $[a,b]$.

Non vale il viceversa di questo risultato, ossia può esistere una funzione *f* che ha integrale improprio convergente in $[a,b]$ per cui $|f|$ non ha integrale improprio convergente in $[a,b]$. Una funzione *f* per cui $|f|$ ha integrale improprio convergente in $[a,b]$, si dice assolutamente integrabile (in senso improprio) in $[a,b]$, altrimenti si dice semplicemente integrabile in $[a,b]$.
E' importante osservare che quest'ultimo risultato evidenzia la differenza della teoria degli integrali impropri con quella dell'integrazione secondo Riemann. In quest'ultimo caso, infatti vale un teorema che afferma esattamente il contrario, cioè: se una funzione limitata in $[a,b]$ è ivi R-integrabile allora anche $|f|$ lo è; mentre non vale il viceversa. Il contro-esempio è fornito dalla funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] - Q \\ -1 & \text{se } x \in [0,1] - I \end{cases}$$

che non è R-integrabile in $[0,1]$ ma lo è $|f|$.
Vale il seguente risultato: una funzione *f* continua in $[a,b)$, ivi illimitata e non negativa (oppure non positiva) in un intorno sinistro di *b* ha integrale improprio regolare in $[a,b]$, cioè convergente oppure divergente in $[a,b]$.
I seguenti criteri forniscono condizioni sufficienti per la convergenza di integrali impropri di funzioni che mantengono segno costante nell'intorno del punto di singolarità.

Criterio del confronto. Siano f e g continue in $[a,b)$ e illimitate. Sia, inoltre, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in un intorno sinistro di *b*. Allora

1) se $g(x)$ ha integrale improprio convergente in $[a,b]$, anche $f(x)$ ha integrale improprio convergente in $[a,b]$;
2) se $f(x)$ ha integrale improprio divergente in $[a,b]$, anche $g(x)$ ha integrale improprio divergente in $[a,b]$.

I seguenti criteri sono conseguenza di quello appena enunciato.

Criterio del confronto asintotico. Siano f e g continue in $[a,b)$, ivi illimitate e non negative in un intorno destro di *b*. Allora

1) se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to b^-$, (a meno di una costante l non nulla), cioè se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, allora gli integrali impropri di f e g in $[a,b]$ hanno lo stesso carattere.

2) se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e l'integrale improprio di g converge in $[a,b]$ allora anche l'integrale improprio di f converge in $[a,b]$.

3) se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e l'integrale improprio di f diverge in $[a,b]$ allora anche l'integrale improprio di g diverge in $[a,b]$.

Tenendo conto del carattere dell'integrale improprio della funzione $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ in $[a,b]$ rispetto al parametro reale positivo α, possiamo stabilire il seguente corollario

Corollario. Sia f continua in $[a,b)$, ivi illimitata e non negativa in un intorno sinistro di *b*. Allora

1) se $\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = l \geq 0$ per un $0 < \alpha < 1$, allora l'integrale improprio di f converge in $[a,b]$.

2) se $\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = \Lambda$ con $\Lambda > 0$ oppure $\Lambda = +\infty$ per un $\alpha \geq 1$, allora l'integrale improprio di f diverge in $[a,b]$.

Esempio 10. Stabilire il carattere del seguente integrale $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ed eventualmente calcolarlo.

Si ha $\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/2}}} = 1$ (cioè $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$ è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$). Quindi, essendo $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$, segue la convergenza dell'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$ nell'intervallo $[0,1]$. Inoltre si ha $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_0^{1-h} \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

Si pone $1 - x = t^2$ ($t > 0$) da cui per sostituzione si ottiene

$$\int_0^{1-h} \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$= -2\int_1^{\sqrt{h}} \left(1-t^2\right)^2 dt = 2\int_{\sqrt{h}}^1 \left(1-2t^2+t^4\right)dt = 2\left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right)\Bigg]_{\sqrt{h}}^1 = 2\left(\frac{8}{15} - \sqrt{h}\left(1 - \frac{2}{3}h + \frac{1}{5}h^2\right)\right)$$

da cui segue $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_0^{1-h} \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{16}{15}$.

Esempio 11. Stabilire il carattere del seguente integrale $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$ ed eventualmente calcolarlo.

Si ha $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = 1$ (cioè $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$ è un infinito di ordine $\frac{1}{2}$). Quindi, essendo $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$, segue la convergenza dell'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo $[0,1]$.

Inoltre si ha $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$.

Si pone $x = t^2$ ($t > 0$) da cui per sostituzione si ottiene

$$\int_h^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = 2\int_{\sqrt{h}}^1 \left(1+t^2\right) dt = 2\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\Bigg]_{\sqrt{h}}^1 = 2\left(\frac{4}{3} - \sqrt{h}\left(1 + \frac{1}{3}h\right)\right)$$

da cui segue $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \frac{8}{3}$.

Esempio 12. Stabilire il carattere del seguente integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ ed eventualmente calcolarlo.

Esempio 13. Studiare l'integrabilità della funzione $f(x) = \frac{1}{x^3 \sin x}$ sull'intervallo $[0,2]$.

Esempio 14. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}} dx$.

Esempio 15. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ e $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$.

Esempio 16. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$ e $\int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}} dx$.

Esempio 17. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x} dx$ e $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx$.

Esempio 18. Studiare il carattere del seguente integrale $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}} x^{-k} dx$ con $k \in \mathrm{N}$.

Esempio 19. Calcolare l'area del dominio illimitato delimitato dalla curva di eq. $x^2\left(x^2+y^2\right) - a^2y^2 = 0$ e dalle rette di eq. $x = \pm a$.

INTEGRALI IMPROPRI DI 1 SPECIE

Sia *f* una funzione continua nell'intervallo $[a,+\infty)$ (oppure $(-\infty,b]$, oppure $(-\infty,+\infty)$).

Definizione 3. Si dice che la funzione f ha integrale in senso improprio (o generalizzato) convergente in $[a,+\infty)$ se esiste finito il limite $\lim_{h\to+\infty}\int_a^h f(x)\,dx$. In tal caso si pone per definizione $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to+\infty}\int_a^h f(x)\,dx$.

Se il limite $\lim_{h\to+\infty}\int_a^h f(x)\,dx$ è uguale $\pm\infty$ oppure non esiste, allora l'integrale improprio si dice divergente oppure irregolare.

Nel caso in cui l'integrale improprio della funzione *f* converge in $[a,+\infty)$, si dirà che la funzione *f* è integrabile in $[a,+\infty)$.

Esempio 20. Calcolare $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$.

Esempio 21. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Esempio 22. Calcolare $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$.

Esempio 23. Calcolare $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx$.

Esempio 24. Calcolare $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$.

Esempio 25. Calcolare $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$.

Esempio 26. Calcolare, al variare del parametro reale positivo α, $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ con $a>0$.

L'integrale improprio dell'esempio 26 risulta convergente se $\alpha>1$, mentre risulta divergente se $0<\alpha\le 1$. Anche in questo caso questo risultato può essere sfruttato nei criteri di convergenza del confronto o del confronto asintotico per gli integrali impropri.

Teorema. Sia *f* continua in $[a,+\infty)$. Se $|f|$ ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$, allora anche *f* ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$.

Non vale il viceversa di questo risultato, ossia può esistere una funzione f che ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$ per cui $|f|$ non ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$.

Una funzione *f* per cui $|f|$ ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$, si dice assolutamente integrabile (in senso improprio) in $[a,+\infty)$, altrimenti si dice semplicemente integrabile in $[a,+\infty)$.

Vale il seguente risultato: una funzione *f* continua in $[a,+\infty)$, non negativa (oppure non positiva) in un intorno di $+\infty$ ha integrale improprio regolare in $[a,+\infty)$, cioè convergente oppure divergente in $[a,+\infty)$.

I seguenti criteri forniscono condizioni sufficienti per la convergenza di integrali impropri di funzioni che mantengono segno definitivamente costante.

Criterio del confronto. Siano f e g continue in $[a,+\infty)$. Sia, inoltre, definitivamente $0 \le f(x) \le g(x)$. Allora

1) se $g(x)$ ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$, anche $f(x)$ ha integrale improprio convergente in $[a,+\infty)$;
2) se $f(x)$ ha integrale improprio divergente in $[a,+\infty)$, anche $g(x)$ ha integrale improprio divergente in $[a,+\infty)$.

I seguenti criteri sono conseguenza di quello appena enunciato.

Criterio del confronto asintotico.
Siano f e g continue in $[a,+\infty)$ e definitivamente non negative. Allora

1) se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$, (a meno di una costante l non nulla), cioè se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \ne 0$, allora gli integrali impropri di f e g in $[a,+\infty)$ hanno lo stesso carattere.
2) se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e l'integrale improprio di g converge in $[a,+\infty)$ allora anche l'integrale improprio di f converge in $[a,+\infty)$.
3) se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e l'integrale improprio di f diverge in $[a,+\infty)$ allora anche l'integrale improprio di g diverge in $[a,+\infty)$.

Tenendo conto del carattere dell'integrale improprio della funzione $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ in $[a,+\infty)$ rispetto al parametro reale positivo α, possiamo stabilire il seguente corollario

Corollario. Sia f continua in $[a,+\infty)$ e definitivamente non negativa. Allora

1) se $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l \ge 0$ per un $\alpha > 1$, allora l'integrale improprio di f converge in $[a,+\infty)$.
2) se $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \Lambda$ con $\Lambda > 0$ oppure $\Lambda = +\infty$ per un $0 < \alpha < 1$, allora l'integrale improprio di f diverge in $[a,+\infty)$.

Esempio 27. Le funzioni $\dfrac{\sin x}{x^2}$ e $\dfrac{1+\sin^2 x}{x}$ hanno integrale improprio rispettivamente convergente e divergente in $[1,+\infty)$. Infatti $\forall x \ge 1$ risulta $\dfrac{\sin x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ e $\dfrac{1+\sin^2 x}{x} \ge \dfrac{1}{x}$; il risultato segue allora dal teorema del confronto.

Esempio 28. Stabilire il carattere del seguente integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ ed eventualmente calcolarlo.

Esempio 29. Stabilire il carattere del seguente integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$ ed eventualmente calcolarlo.

Esempio 30. Stabilire il carattere del seguente integrale $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{x^3\sqrt{4x^2-1}}dx$ ed eventualmente calcolarlo.

Esempio 31. Studiare l'integrabilità della funzione $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ sull'intervallo $[1,+\infty)$.

Esempio 32. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico di $f(x)=x\arctan x$ e dai suoi asintoti.

Esempio 33. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}dx$ e $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$.

Esempio 34. Calcolare l'integrale $\int_0^{+\infty} x\ln x\,dx$.

Esempio 35. Studiare il carattere dei seguenti integrali di Fresnel $I_1=\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)dx$ e $I_2=\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)dx$.

Esempio 36. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+\sin^2 x}$ e $\int_1^{+\infty}\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}dx$.

Esempio 37. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+(n-1)}{n}\right)dx$, con $n\in\mathrm{N}$, e $\int_1^{+\infty}\frac{1-4\sin(2x)}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$.

Esempio 38. Provare che l'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ converge semplicemente, ma non assolutamente, in $[0,+\infty)$.

Esempio 39. Studiare il carattere dei seguenti integrali $\int_0^2\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}dx$, $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}dx$ e $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}dx$.

Esempio 40. Provare la convergenza del seguente integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx$.

Esempio 39. Studiare, per quali valori del parametro reale α, il seguente integrale $\int_0^{+\infty}x^\alpha\ln(1+x)\,dx$ converge.

Esempio 40. Studiare, per quali valori dei parametri reali α e β, il seguente integrale $\int_a^{+\infty}e^{-\alpha x}x^\beta dx$ converge.

Esempio 41. Studiare la convergenza del seguente integrale $\int_0^1 e^{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x \ln x}{x}\right)} dx$.

Esempio 42. Per ogni $n \in \mathrm{N}$ sia $I_n = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n} dx$.

a) Dimostrare che I_n esiste.

b) Stabilire una relazione di ricorrenza tra I_n e I_{n+1}.

c) Dedurre da b) che la successione $\{I_n\}$ è convergente.

Esempio 43. Per ogni $n \in \mathrm{N}$ sia $I_n = \int_a^{+\infty} \frac{e^{nx}}{\left(1+e^n\right)^{n+1}} dx$.

a) Dimostrare che I_n esiste.

b) Stabilire una relazione di ricorrenza tra I_n e I_{n+1}.

c) Dedurre da b) che la successione $\{I_n\}$ è convergente.