

1. Determinare la funzione $f(x)$ tale che $\begin{cases} f'(x) = |x-1|e^x \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

Si ha $f(x) = \int_0^x |t-1|e^t dt - 1$, con $D_f = \mathbb{R}$. La funzione integranda è $|t-1|e^t = \begin{cases} (1-t)e^t & \text{se } t < 1 \\ (t-1)e^t & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$.

Quindi, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (1-t)e^t dt - 1 & \text{se } x < 1 \\ \int_0^1 (1-t)e^t dt + \int_1^x (t-1)e^t dt - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$$

da cui, integrando per parti, si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - xe^x - 3 & \text{se } x < 1 \\ -2e^x + xe^x + 2e - 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

2. Utilizzare la formula di MacLaurin per calcolare, al variare del parametro reale α , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - \arcsin x}{x^\alpha}$

Dalle formule di MacLaurin, per $x \rightarrow 0^+$, del terzo ordine

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o[x^3]$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o[x^3]$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - \arcsin x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3-\alpha} \left(-\frac{1}{2} + o[1] \right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

3. Evidenziare, nel piano di Gauss, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z+i| = |z+1|$.

Posto $z = x + iy$, l'equazione diventa $|x+i(y+1)| = |(x+1)+iy|$, cioè

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \quad \text{ovvero} \quad x^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + y^2,$$

da cui si ottiene $y = x$. In conclusione le soluzioni dell'equazione sono tutti i numeri complessi giacenti sulla bisettrice del primo e terzo quadrante del piano di Gauss.

4. Siano $f = o[\tan x]$ e $g = o[x]$ per $x \rightarrow 0$. Dimostrare o confutare che $f + g = o[\tan x + x]$ per $x \rightarrow 0$. (facoltativo)

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{\tan x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan x + x} + \frac{g(x)}{\tan x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\tan x}}{1 + \frac{x}{\tan x}} + \frac{\frac{g(x)}{x}}{\frac{\tan x}{x} + 1} = 0;$$

quindi l'affermazione risulta verificata.

1. Determinare la funzione $y = f(x)$ tale che $\begin{cases} f'(x) = |x+1|e^x \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Si ha $f(x) = \int_0^x |t+1|e^t dt + 1$, con $D_f = \mathbb{R}$. La funzione integranda è $|t+1|e^t = \begin{cases} (-1-t)e^t & \text{se } t < -1 \\ (t+1)e^t & \text{se } t \geq -1 \end{cases}$.

Quindi, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{-1} (t+1)e^t dt - \int_{-1}^x (t+1)e^t dt + 1 & \text{se } x < -1 \\ \int_0^x (t+1)e^t dt + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases},$$

da cui, integrando per parti, si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} -xe^x - \frac{2}{e} + 1 & \text{se } x < -1 \\ xe^x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}.$$

2. Utilizzare la formula di MacLaurin per calcolare, al variare del parametro reale α , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^\alpha}$.

Dalle formule di MacLaurin, per $x \rightarrow 0^+$, del terzo ordine

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o[x^3]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o[x^3]$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3-\alpha} \left(\frac{1}{2} + o[1] \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

3. Evidenziare, nel piano di Gauss, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z+i| = |z-1|$.

Posto $z = x + iy$, l'equazione diventa $|x + i(y+1)| = |(x-1) + iy|$, cioè

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{ovvero} \quad x^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + y^2,$$

da cui si ottiene $y = -x$. In conclusione le soluzioni dell'equazione sono tutti i numeri complessi giacenti sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante del piano di Gauss.

4. Siano $f = o[x]$ e $g = o[\arcsin x]$ per $x \rightarrow 0$. Dimostrare o confutare che $f + g = o[x + \arcsin x]$ per $x \rightarrow 0$. (facoltativo)

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x + \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x + \arcsin x} + \frac{g(x)}{x + \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{1 + \frac{\arcsin x}{x}} + \frac{\frac{g(x)}{\arcsin x}}{\frac{x}{\arcsin x} + 1} = 0;$$

quindi l'affermazione risulta verificata.

5. Determinare il dominio e l'insieme di derivabilità dell'inversa della funzione $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x-1}$ ristretta nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

f è derivabile in $(-\infty, 0)$ e, $\forall x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)(x-1)^2} > 0$ e quindi f è strettamente

crescente in $(-\infty, 0)$. Allora $D_{f^{-1}} = D_{(f^{-1})'} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -1 \right)$.

6. Verificare, mediante la definizione di limite, se l'affermazione $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 0$ è vera o falsa.

Deve risultare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x \in (0, \delta_\varepsilon) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{x}} < \varepsilon$.

Determiniamo le soluzioni della disequazione $\left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{x}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x} < \log_{3/2} \varepsilon$. Quindi l'affermazione è falsa in quanto a primo membro c'è una quantità positiva e a secondo membro una quantità negativa. L'insieme delle soluzioni è vuoto.

5. Determinare il dominio e l'insieme di derivabilità dell'inversa della funzione $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x-1}$ ristretta nell'intervallo $(1, +\infty)$

f è derivabile in $(1, +\infty)$ e, $\forall x \in (1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)(x-1)^2} < 0$ e quindi f è strettamente

decrescente in $(1, +\infty)$. Allora $D_{f^{-1}} = D_{(f^{-1})'} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = \left(\frac{\pi}{2}, +\infty \right)$.

6. Verificare, mediante la definizione di limite, se l'affermazione $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = +\infty$ è vera o falsa.

Deve risultare che $\forall k > 0 \exists \delta_k > 0 / \forall x \in (0, \delta_k) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} > k$.

Determiniamo le soluzioni della disequazione $\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} > k \Rightarrow \frac{1}{x} < \log_{1/2} k$. Quindi l'affermazione è falsa in quanto a primo membro c'è una quantità positiva e a secondo membro una quantità negativa. L'insieme delle soluzioni è vuoto.