1. Determinare la funzione $f(x)$ tale che $\begin{cases} f'(x) = xe^{|x|} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$.

Si ha $f(x) = \int_{-1}^{x} te^{|t|}dt$ *il cui dominio è* $D_f = \mathbb{R}$. *La funzione integranda è* $te^{|t|} = \begin{cases} te^{-t} & \text{se } t < 0 \\ te^{t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

Allora

$$f(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} te^{-t}dt & \text{se } x < 0 \\ \int_{-1}^{0} te^{-t}dt + \int_{0}^{x} te^{t}dt & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\int_{-1}^{x} te^{-t}dt = -\int_{-1}^{x} tde^{-t} = \left[-te^{-t}\right]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_{-1}^{x} - \left[e^{-t}\right]_{-1}^{x} = -xe^{-x} - e - e^{-x} + e = e^{-x}\left(-x-1\right)$$

$$\int_{-1}^{0} te^{-t}dt = -\int_{-1}^{0} tde^{-t} = \left[-te^{-t}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_{-1}^{0} - \left[e^{-t}\right]_{-1}^{0} = -e - 1 + e = -1$$

$$\int_{0}^{x} te^{t}dt = \int_{0}^{x} tde^{t} = \left[te^{t}\right]_{0}^{x} - \int_{0}^{x} e^{t}dt = \left[te^{t}\right]_{0}^{x} - \left[e^{t}\right]_{0}^{x} = xe^{x} - e^{x} + 1 = e^{x}\left(x-1\right) + 1.$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x}\left(x+1\right) & \text{se } x < 0 \\ e^{x}\left(x-1\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Utilizzare la formula di MacLaurin per calcolare, al variare del parametro reale α, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - \arcsin x}{x^3}$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - x - \frac{x^3}{6} + o\left[x^3\right]}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\alpha - 1\right) - \frac{x^2}{6} + o\left[x^2\right]}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ -1/6 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

3. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione $z^2 + 2|z| - \mathrm{Im}\left(z\right) - 1 = 0$.

Posto $z = x + iy$*, l'equazione diventa,*

$$x^2 - y^2 + 2ixy + 2\sqrt{x^2 + y^2} - y - 1 = 0$$

Che equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} - y - 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Quindi si ha:

Caso 1) $x = 0$*;*
sostituendo alla prima equazione
$-y^2 + 2\sqrt{y^2} - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -y^2 + 2|y| - y - 1 = 0$

Caso 1.1) $y \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$-y^2+y-1=0 \;\Rightarrow\; y^2-y+1=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$ *non accettabili.*

Caso 1.2) $y<0$

$$\Rightarrow\; -y^2-3y-1=0 \;\Rightarrow\; y^2+3y+1=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$ *accettabili entrambe.*

Caso 2) $y=0$*;*

sostituendo alla prima equazione

$x^2+2\sqrt{x^2}-1=0 \;\Rightarrow\; x^2+2|x|-1=0$

Caso 2.1) $x\geq 0$

$$\Rightarrow\; x^2+2x-1=0 \;\Rightarrow\; x=-1\pm\sqrt{1+1}=-1\pm\sqrt{2}$$ *accettabile solo* $-1+\sqrt{2}$.

Caso 2.2) $x<0$

$$\Rightarrow\; x^2-2x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$$ *accettabile solo* $1-\sqrt{2}$.

Le soluzioni sono $z_1=-i\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$*;* $z_2=i\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$*;* $z_3=-1+\sqrt{2}$*;* $z_4=1-\sqrt{2}$.

4. Sia $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{dt}{t^2\cos^2 t}$. Dimostrare che $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$**.** (esercizio facoltativo)

In un opportuno intorno sinistro di 0, $(-\delta,0)$*, risulta* $\dfrac{1}{\cos^2 t}>1$ *e quindi* $\dfrac{1}{t^2\cos^2 t}>\dfrac{1}{t^2}$. *Per la proprietà di monotonia degli integrali segue* $\forall x\in(-\delta,0)$

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\frac{dt}{t^2\cos^2 t}>\int_{-1}^{x}\frac{dt}{t^2}=\int_{-1}^{x}t^{-2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_{-1}^{x}=-\frac{1}{x}-1.$$

Poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$*, la tesi segue dal teorema del confronto dei limiti.*

1. Determinare la funzione $f(x)$ tale che $\begin{cases} f'(x) = xe^{|x|} \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

Si ha $f(x) = \int_1^x te^{|t|}dt$ *il cui dominio è* $D_f = \mathbb{R}$. *La funzione integranda è* $te^{|t|} = \begin{cases} te^{-t} & \text{se } t < 0 \\ te^{t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

Allora

$$f(x) = \begin{cases} \int_1^0 te^t dt + \int_0^x te^{-t}dt & \text{se } x < 0 \\ \int_1^x te^t dt & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\int_0^x te^{-t}dt = -\int_0^x t de^{-t} = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = -e^{-x}\left(x+1\right)+1$$

$$\int_1^0 te^t dt = \int_1^0 tde^t = \left[te^t\right]_1^0 - \int_1^0 e^t dt = \left[te^t\right]_1^0 - \left[e^t\right]_1^0 = -e - 1 + e = -1$$

$$\int_1^x te^t dt = \int_1^x tde^t = \left[te^t\right]_1^x - \int_1^x e^t dt = \left[te^t\right]_1^x - \left[e^t\right]_1^x = xe^x - e - e^x + e = e^x\left(x-1\right).$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x}\left(x+1\right) & \text{se } x < 0 \\ e^x\left(x-1\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

2. Utilizzare la formula di MacLaurin per calcolare, al variare del parametro reale α, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - \arctan x}{x^3}$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - x + \frac{x^3}{3} + o\left[x^3\right]}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\alpha - 1\right) + \frac{x^2}{3} + o\left[x^2\right]}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 1/3 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

3. Risolvere, nel campo complesso, l'equazione $z^2 + 2|z| - \mathrm{Re}\left(z\right) - 2 = 0$

Posto $z = x + iy$, *l'equazione diventa,*

$$x^2 - y^2 + 2ixy + 2\sqrt{x^2+y^2} - x - 2 = 0$$

Che equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} - x - 2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Quindi si ha:

Caso 1) $x = 0$;
sostituendo alla prima equazione
$-y^2 + 2\sqrt{y^2} - 2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; -y^2 + 2|y| - 2 = 0$

Caso 1.1) $y \geq 0 \quad \Rightarrow$

$$-y^2 + 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{1-2} \text{ non accettabili.}$$

Caso 1.2) $y < 0$

$$\Rightarrow \quad -y^2 - 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{1-2} \text{ non accettabili.}$$

Caso 2) $y = 0$;

sostituendo alla prima equazione

$$x^2 + 2\sqrt{x^2} - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2|x| - x - 2 = 0$$

Caso 2.1) $x \geq 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \text{ accettabile solo } 1.$$

Caso 2.2) $x < 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ accettabile solo } \frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

Le soluzioni sono $z_1 = 1$; $z_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.