COSTRUZIONE ASSIOMATICA DEI NUMERI REALI

Si vuole arrivare alla descrizione completa dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ per via assiomatica partendo dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e passando attraverso l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ e dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Si tenga presente che, dal punto di vista algebrico, la costruzione dei numeri reali e le regole di calcolo tra questi avviene in modo più strutturale da quello qui descritto (che ha solo l'intento di indicare sommariamente le ragioni che rendono necessari via via gli ampliamenti da insiemi numerici ad altri e di riassumere le regole di calcolo tra i vari elementi di un particolare insieme numerico) introducendo dapprima $\mathbb{N}$ e di conseguenza definendo la relazione di uguaglianza e le operazioni di somma e prodotto, quindi passando alla costruzione di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Q}$, e alle definizioni delle operazioni di somma e prodotto in tali insiemi, mediante il concetto di classe di equivalenza, infine definendo i numeri reali e le relative operazioni di somma e prodotto mediante le sezioni di Dedekind e le classi di equivalenza. Gli assiomi, che qui considereremo come regole "primitive" (non dimostrabili), sono in realtà proprietà dimostrabili come conseguenza della suddetta costruzione.

Con gli elementi "primitivi" (cioè privi di una definizione) di $\mathbb{N}$, detti numeri naturali, si considerano la relazione di uguaglianza (=) e le operazione di somma (+) e di prodotto (·). Attraverso la relazione di uguaglianza $a=b$, con $a,b \in \mathbb{N}$, si stabilisce che i simboli a e b identificano lo stesso numero naturale. Per essa valgono le seguenti regole (che accetteremo in quanto tali, senza dimostrazione) dette anche assiomi o postulati:

1) $\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = a$ (proprietà di riflessiva);
2) $\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow$ se $a=b$ allora $b=a$ (proprietà simmetrica);
3) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ se $a=b$ e $b=c$ allora $a=c$ (proprietà transitiva).

La relazione di uguaglianza con i suoi postulati continuerà a sussistere anche per i successivi insiemi che introdurremo. Per le operazioni di somma e prodotto si fissano io seguenti assiomi:

1) $\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \in \mathbb{N}, ab \in \mathbb{N}$ (proprietà di chiusura di $\mathbb{N}$ rispetto alla somma e al prodotto);
2) $\forall a,b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b=b+a, ab=ba$ (proprietà commutativa);
3) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc)$ (proprietà associativa);
4) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)c=ac+bc$ (proprietà distributiva);
5) $\exists 1 \in \mathbb{N} / \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a1=a$ (proprietà dell'elemento neutro rispetto al prodotto).

Questi cinque assiomi valgono, ovviamente, anche per l'insieme dei cosidetti numeri interi non negativi $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cap \{0\}$ (si sostituisca $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N}$); il nuovo elemento 0 è caratterizzato dall'ulteriore seguente assioma

6) $0 \in \mathbb{N}_0$ è tale che $\forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a+0=a$ (proprietà dell'elemento neutro rispetto alla somma).

Tutte le regole di calcolo note dei numeri interi non negativi sono conseguenze degli assiomi. Dimostriamone alcune.

Teorema 1: *unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma e al prodotto*.

Dim. Sia $\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tale che $\forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a + \varepsilon = a$. Allora si ha $\varepsilon = 0 + \varepsilon = 0$. Sia, invece, $\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tale che $\forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a\varepsilon = a$. Allora si ha $\varepsilon = 1\varepsilon = 1$.

Teorema 2: $\forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a0 = 0$.

Dim. Si ha $a = a(1+0) = a + a0$. Allora il numero $a0$ opera come 0. Per l'unicità di tale elemento segue la tesi.

Vediamo ora come si perviene alla identificazione dei numeri interi non negativi con i classici simboli.

Def. $\forall a \in \mathbb{N}_0$, si definisce successivo di *a* il numero $a+1$.

Segue immediatamente dalla def. e dall'assioma 6) che 1 è il successivo di 0. Indichiamo con il simbolo "2" il successivo di 1 (2 = 1 + 1), con "3" il successivo di 2 (3 = 2 + 1) e così via.

E' possibile notare come, grazie all'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma, tale processo genera sempre un numero naturale nuovo (diverso cioè da tutti quelli precedentemente costruiti); di conseguenza si dirà che l'insieme $\mathbb{N}_0$ contiene infiniti elementi.

Mediante il concetto di numero successivo possiamo stabilire, per esempio, i risultati delle somme 2 + 3 e 3 + 4 nel seguente modo:

$$2 + 3 = (1 + 1) + 3 = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5;$$

$$3 + 4 = (2 + 1) + 4 = 2 + (4 + 1) = (1 + 1) + 5 = (5 + 1) + 1 = 6 +1 = 7.$$

Il prodotto tra due naturali *a*, *b* viene definito come la somma $a + \cdots + a$ (*b*-volte) oppure, in modo equivalente, come la somma $b + \cdots + b$ (*a*-volte).

L'assioma 1) relativo all'insieme $\mathbb{N}_0$ esclude la possibilità che dato un numero qualsiasi $a \in \mathbb{N}_0$ esista un $\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ per cui si abbia $\varepsilon + a = 0$ (di conseguenza diremo che è impossibile, nell'ambito dei numeri interi non negativi, risolvere equazioni del tipo 2 + *x* = 0). Allora a partire dal numero naturale *a*, introduciamo per definizione un nuovo "ente numerico" che goda di tale proprietà, lo indichiamo con il simbolo "- *a"* che chiameremo *elemento opposto* di *a*. Ovviamente l'introduzione di tale nuovo ente numerico rende necessario l'ampliamento dell'insieme $\mathbb{N}_0$ ad un nuovo insieme numerico che lo riconosca e lo accolga come numero. Si arriva così a definire l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ come l'unione tra $\mathbb{N}_0$ e l'insieme di tutti gli elementi opposti di $\mathbb{N}$. Ovviamente si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.

Per l'insieme $\mathbb{Z}$ si stabilisce la validità dei sei assiomi su scritti (si sostituisca $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}_0$) e di quella del seguente ulteriore assioma che caratterizza l'elemento opposto

7) $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + (-a) = 0$ (proprietà dell'elemento opposto).

Vale la pena osservare che stabilire per $\mathbb{Z}$ la validità dell'assioma 7) equivale a definire (caratterizzare) non solo l'opposto di un numero naturale (motivo che ci ha spinto ad introdurre $\mathbb{Z}$), ma anche l'opposto di un numero intero. Inoltre si osservi che $0 = -0$; infatti si ha $-0 = -0 + 0 = 0$

Teorema 3: *unicità dell'elemento opposto*.

Dim. Sia $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tale che $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+\varepsilon = 0$. Allora si ha $-a = (-a)+a+\varepsilon = \varepsilon$.

Teorema 4: $\forall a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a(-b) = (-a)b = -ab$.

Dim. Si ha $a(-b)+ab = a((-b)+b) = a0 = 0$. Analogamente $(-a)b+ab = b((-a)+a) = b0 = 0$. Quindi sia il numero $a(-b)$ che $(-a)b$ operano come l'opposto di ab. Dall'unicità dell'elemento opposto segue la tesi.

Teorema 5: $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(-a) = a$.

Dim. Si ha $-(-a) = -(-a)+(-a)+a = a$.

Teorema 6: $\forall a,b \in \mathbb{Z},$ se $a = b \Rightarrow -a = -b$.

Dim. Si ha $-a = -a+(-b)+b = -a+(-b)+a = -b$.

Teorema 7: $\forall a,b \in \mathbb{Z}, \ \Rightarrow (-a)+(-b) = -(a+b)$.

Dim. Si ha $((-a)+(-b))+(a+b) = 0$ per la proprietà associativa. Quindi dall'unicità dell'elemento opposto segue la tesi.

Si osservi che come conseguenza si ha che la somma degli opposti di due numeri naturali non è un numero naturale.

Resta intrinsecamente definito un ordinamento tra i numeri interi. Infatti diremo che

Def. $\forall a,b \in \mathbb{Z}, \ a > b \overset{def}{\Rightarrow} a+(-b) \in \mathbb{N}$;

$\forall a,b \in \mathbb{Z}, \ a < b \overset{def}{\Rightarrow} b+(-a) \in \mathbb{N}$;

$\forall a,b \in \mathbb{Z}, \ a \geq b \overset{def}{\Rightarrow} a+(-b) \in \mathbb{N}$ oppure $a+(-b) = 0$ (cioè $a = b$);

$\forall a,b \in \mathbb{Z}, \ a \leq b \overset{def}{\Rightarrow} b+(-a) \in \mathbb{N}$ oppure $b+(-a) = 0$ (cioè $a = b$).

Si ha allora che $1 > 0$; infatti $1+(-0) = 1+0 = 1$. Ancora $2 > 1$; infatti $2+(-1) = \varepsilon$, dove ε è quel naturale il cui successivo è 2 (cioè $\varepsilon = 1$). Ancora $-1 < 0$; infatti $0+(-(-1)) = 1$. Ancora $-2 < -1$; infatti $-1+(-(-2)) = -1+2 = 1$. E così via.

Osserviamo che è possibile estendere agli elementi di $\mathbb{Z}$ (e quindi in particolare all'insieme $\mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$) il concetto di numero intero successivo di un dato numero intero a come quel numero intero ε per cui si ha $\varepsilon+(-a) = 1$.

Per definizione, diremo *induttivo* un insieme A che soddisfa le seguenti proprietà

i) $1 \in A$;
ii) $\forall a \in A \Rightarrow a+1 \in A$.

Quindi sia $\mathbb{N}$ che $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ sono insiemi induttivi. In particolare si dimostra attraverso il teorema di induzione che $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo, contenuto cioè in ogni altro insieme induttivo.

Ci chiediamo ora se sia sempre possibile, fissato un qualsiasi intero a non nullo, determinare in $\mathbb{Z}$ un elemento ε per cui si abbia $\varepsilon a = 1$. Dimostriamo come ciò non sia possibile (di conseguenza è impossibile, nell'ambito dei numeri interi, risolvere equazioni del tipo $2\ x = 1$). Chiaramente sarà $\varepsilon \neq 0$ e $\varepsilon \neq 1$. Per semplicità fissiamo $a = 2$. Allora se ciò fosse vero esisterebbe un $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ per cui si ha $\varepsilon 2 = \varepsilon(1+1) = \varepsilon + \varepsilon = 1$. Dall'osservazione precedente si ha necessariamente che $\varepsilon \in \mathbb{N}$, altrimenti, essendo l'opposto di un naturale, si avrebbe che $\varepsilon + \varepsilon \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$. Quindi da $\varepsilon + \varepsilon = 1$ segue $\varepsilon + (\varepsilon + (-1)) = 0$. Essendo $\varepsilon > 1$ segue $\varepsilon + (-1) \in \mathbb{N}$. Si perviene dunque ad una contraddizione con il primo assioma relativo ad $\mathbb{N}$.

Come prima introduciamo per definizione un nuovo "ente numerico" che goda di tale proprietà, lo indichiamo con il simbolo "a^{-1}" oppure "$1/a$"e lo chiamiamo *elemento inverso* di a. Di nuovo l'introduzione di tale ente numerico rende necessario l'ampliamento dell'insieme $\mathbb{Z}$ con un nuovo insieme numerico che lo riconosca e lo accolga come numero. Si arriva così a definire l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ nel modo seguente $\mathbb{Q} = \{nd^{-1} : n \in \mathbb{Z} \text{ e } d \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$. Il numero nd^{-1} si scrive in modo equivalente n/d. Ovviamente si ha $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Per l'insieme $\mathbb{Q}$ si stabilisce la validità dei sette assiomi su scritti (si sostituisca $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$) e di quella del seguente ulteriore assioma

8) $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow aa^{-1} = 1$ (proprietà dell'elemento inverso).

Anche qui, stabilire per $\mathbb{Q}$ la validità dell'assioma 8) equivale a definire (caratterizzare) non solo l'inverso di un numero intero non nullo (motivo che ci ha spinto ad introdurre $\mathbb{Q}$), ma anche l'inverso di un numero razionale non nullo.

Teorema 8: *unicità dell'elemento inverso*.

Dim. Sia $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tale che $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow a\varepsilon = 1$. Allora si ha $a^{-1} = (a^{-1})a\varepsilon = \varepsilon$.

Teorema 9: $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$.

Dim. Si ha $(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}(a^{-1})a = a$.

Teorema 10: $\forall a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$, se $a = b \Rightarrow a^{-1} = b^{-1}$.

Dim. Si ha $a^{-1} = a^{-1}(b^{-1})b = a^{-1}(b^{-1})a = b^{-1}$.

Teorema 11: $\forall a, b \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Dim. Si ha $a^{-1} b^{-1} ab = 1$. Di conseguenza per l'unicità dell'elemento inverso si ha la tesi.

Dal teorema 11 si ottiene facilmente $(n/d)^{-1} = d/n$.

Gli otto assiomi stabiliti per $\mathbb{Q}$ si dicono assiomi di campo. In algebra tutti gli insiemi la cui struttura è caratterizzata da una assiomatica come quella dei numeri razionali si dicono "campi"; si dirà allora il campo dei numeri razionali.

Osserviamo come il numero 2/3 = 4/6 e facciamo vedere come si opera con la somma e con il prodotto calcolando il numero 2/3 + 5/2 e 2/3 · 5/2.

$$\frac{4}{6} = 4 \cdot 6^{-1} = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3)^{-1} = 2 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = 2 \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot 2^{-1} \cdot 2 \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 2^{-1} \cdot 3 \cdot 3^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1}(2 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = (2 \cdot 3)^{-1}(4 + 15) = \frac{19}{6};$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 5 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot 5 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1} = (2 \cdot 5)(2 \cdot 3)^{-1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Anche in $\mathbb{Q}$ è possibile stabilire un ordine mediante una opportuna assiomatica (detta appunto dell'ordine). Si evidenzia in $\mathbb{Q}$ un particolare sottoinsieme $\mathbb{Q}^+$, cosiddetto dei numeri razionali positivi, e si stabiliscono per esso i seguenti tre assiomi:

1) $\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}^+$ e $ab \in \mathbb{Q}^+$;
2) $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}^+$ oppure $-a \in \mathbb{Q}^+$;
3) $0 \notin \mathbb{Q}^+$

Quindi si ha:

Def. $\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a > b \overset{def}{\Rightarrow} a + (-b) \in \mathbb{Q}^+$;

$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a < b \overset{def}{\Rightarrow} b + (-a) \in \mathbb{Q}^+$;

$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a \geq b \overset{def}{\Rightarrow} a + (-b) \in \mathbb{Q}^+$ oppure $a + (-b) = 0$ (cioè $a = b$);

$\forall a, b \in \mathbb{Q},\ a \leq b \overset{def}{\Rightarrow} b + (-a) \in \mathbb{Q}^+$ oppure $b + (-a) = 0$ (cioè $a = b$).

Anche $\mathbb{Q}$ è un insieme induttivo, tuttavia, fissato $a \in \mathbb{Q}$ è impossibile definire l'elemento successivo di a (o, in altri termini l'elemento $b \in \mathbb{Q}$ tale che tra a e b non vi siano altri numeri razionali). Infatti tra numeri razionali distinti a, b si interpone sempre il numero razionale $(a + b)/2$; e così tra a e $(a + b)/2$ si interpone sempre il numero razionale $(3a + b)/4$; e così via all'infinito, non consentendo la determinazione del numero razionale successivo di a. Tale differenza tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ viene evidenziata classificando $\mathbb{Z}$ come insieme discreto (lo sono anche $\mathbb{N}$ e tutti gli insiemi finiti), mentre $\mathbb{Q}$ come insieme non discreto. Al contrario di come potrebbe sembrare $\mathbb{Q}$ non è un insieme numerico continuo, in quanto è possibile ancora stabilire una corrispondenza biunivoca tra

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$, ossia posizionare secondo un particolare ordinamento ciascun numero razionale; diremo in tal senso che $\mathbb{Q}$ è un insieme numerico numerabile.

Sia $A \subset \mathbb{Q}$. Un numero razionale *M* si dice maggiorante di *A* se $\forall a \in A \Rightarrow a \leq M$. Se $A \subset \mathbb{Q}$ ammette un maggiorante esso si dice limitato superiormente, altrimenti si dirà illimitato superiormente. Ovviamente un insieme limitato superiormente ammette sempre un numero infinito di maggioranti.

Esempio 1) 1/2 rappresenta un maggiorante per il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 1/2\}$;

Esempio 2) 3/2 rappresenta un maggiorante per il sottoinsieme $B = \{x \in \mathbb{Q} : x < 3/2\}$;

Esempio 3) 2 rappresenta un maggiorante per il sottoinsieme $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$;

Esempio 4) l'insieme $D = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1/2\}$ è illimitato superiormente.

Sia $A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente. Ci chiediamo se tra tutti i suoi maggioranti ne esista uno che goda della proprietà di essere quello più piccolo. In altri termini se esiste un numero razionale Λ tale che verifichi le due seguenti proprietà:

1) $\Lambda \geq x, \forall x \in A$;
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in A / x > \Lambda - \frac{1}{n}$.

Se ciò accade chiameremo tale numero estremo superiore di *A* e scriveremo Λ = sup *A*. Vediamo cosa possiamo dire in proposito per gli insiemi degli esempi sopra riportati.

Esempio 1) Si ha $\sup A = \frac{1}{2}$. Infatti, la 1) è verificata per definizione stessa di *A*. Per la 2) basta costatare che $\frac{1}{2} \in A$ e che $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio 2) Si ha $\sup B = \frac{3}{2}$. Infatti, la 1) è verificata per definizione stessa di *B*. Per la 2) basta costatare che, $\forall n \in \mathbb{N}$, tra $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{n}$ cadono infiniti elementi di *B*.

Da tali esempi è intuitivo costatare che tutti i numeri razionali *n/d* possono essere considerati estremi superiori di un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ limitato superiormente $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq n/d\}$.

Esempio 3) L'insieme *C* non è dotato di estremo superiore. Per verificare ciò cominciamo col dimostrare che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 2. Sia, per assurdo, $q \in \mathbb{Q} / q^2 = 2$. Allora $q = n/d$ con $n \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Possiamo supporre che *n* e *d* siano coprimi. Si ha quindi $n^2 = 2d^2$ da cui segue che n^2 è pari. Allora anche n è pari, cioè $n = 2k$ per un opportuno intero *k* (se n fosse dispari, cioè $n = 2k+1$ per un opportuno intero *k*, allora anche n^2 sarà dispari, infatti

$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$). Da ciò segue $d^2 = 2k^2$ e quindi anche d è pari, in contraddizione con la supposizione che n e d siano coprimi.

Ora supponiamo che l'insieme C ammetta un razionale Λ come suo estremo superiore. Per quanto appena visto si avrà necessariamente $\Lambda^2 \neq 2$ e quindi $\Lambda^2 < 2$ ovvero $\Lambda^2 > 2$. Supponiamo $\Lambda^2 < 2$; facciamo quindi vedere come sia possibile determinare un $\varepsilon \in \mathsf{Q}$ tale che $(\Lambda + \varepsilon)^2 < 2$ in contraddizione con il fatto che Λ rappresenta un maggiorante di C (dal momento che, per definizione di C, $\Lambda + \varepsilon \in C$ e quindi esisterebbe un elemento di C maggiore del sup C).

$(\Lambda + \varepsilon)^2 < 2$ equivale alla disuguaglianza $2\Lambda\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 - \Lambda^2$. Imponiamo la condizione che $0<\varepsilon < 1$, in modo tale che $2\Lambda\varepsilon + \varepsilon^2 < 2\Lambda\varepsilon + \varepsilon$. Allora le soluzioni, in ε, della disequazione $2\Lambda\varepsilon + \varepsilon < 2 - \Lambda^2$, cioè $\varepsilon < \left(2 - \Lambda^2\right)/\left(2\Lambda + 1\right)$, lo sono anche per quella di partenza. In conclusione basta prendere un qualsiasi numero razionale positivo $\varepsilon < \min\left\{\left(2 - \Lambda^2\right)/\left(2\Lambda + 1\right), 1\right\}$ affinché si abbia $(\Lambda + \varepsilon)^2 < 2$.

Supponiamo ora $\Lambda^2 > 2$; facciamo vedere come sia possibile determinare un $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tale che $(\Lambda - \varepsilon)^2 > 2$ in contraddizione con il fatto che Λ rappresenta il più piccolo dei maggioranti di C. $(\Lambda - \varepsilon)^2 > 2$ equivale alla disuguaglianza $2\Lambda\varepsilon - \varepsilon^2 < \Lambda^2 - 2$. Poiché $2\Lambda\varepsilon - \varepsilon^2 < 2\Lambda\varepsilon$, le soluzioni, in ε, della disequazione $2\Lambda\varepsilon < \Lambda^2 - 2$, cioè $\varepsilon < \left(\Lambda^2 - 2\right)/2\Lambda$, lo sono anche per quella di partenza. In conclusione basta prendere un qualsiasi numero razionale positivo $\varepsilon < \left(\Lambda^2 - 2\right)/2\Lambda$ affinché si abbia $(\Lambda - \varepsilon)^2 > 2$.

Questo esempio mostra, tra l'altro, l'impossibilità di risolvere, nell'ambito dei numeri razionali, equazioni del tipo $x^2 - 2 = 0$.

Introduciamo allora un "ente numerico" nuovo che chiameremo numero irrazionale, e di conseguenza un nuovo insieme numerico che li contenga tutti detto l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R} = \left\{\sup A : A \subset \mathbb{Q} \text{ lim. sup.}\right\}.$$

Si ha $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; più precisamente $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, dove con $\mathbb{I}$ indichiamo tutti gli irrazionali.

Si estende, ovviamente, la validità di tutti gli assiomi di campo e dell'ordine validi in $\mathbb{Q}$. Quindi, dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, si definisce maggiorante di A un qualsiasi numero reale $M \geq x, \forall x \in A$. Se A ammette maggioranti si dice limitato superiormente altrimenti illimitato superiormente. Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, definiamo sup$A$ il numero reale Λ che soddisfa alle due proprietà

1) $\Lambda \geq x, \forall x \in A$;
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A / x > \Lambda - \varepsilon$.

Si stabilisce, infine, la validità del seguente *assioma di completezza*: ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore.

Riportiamo di seguito alcune delle proprietà più importanti.

Teorema 1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente (proprietà archimedea).

Dim. Se ciò non fosse allora per l'assioma di completezza $\mathbb{N}$ ammette un estremo superiore Λ, e quindi $n \le \Lambda, \forall n \in \mathbb{N}$. Poiché anche $n+1 \in \mathbb{N}$ si ha $n+1 \le \Lambda$ e quindi $n \le \Lambda - 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Ma ciò contraddice la seconda proprietà dell'estremo superiore.

Teorema 2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \overline{n} \in \mathbb{Z} / \overline{n} \le x < \overline{n} + 1$ ($\overline{n} = [x]$, "parte intera di x").

Dim. Consideriamo il numero $|x|$. Per la proprietà precedente $\exists n \in \mathbb{N} / |x| \le n$, cioè $-n \le x \le n$. Tra gli interi $\{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$, poiché sono in numero finito, è possibile determinare quello $\overline{n}$ che risulta più grande tra quelli che sono minori o uguali a x, da cui la tesi.

Teorema 3) $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\exists r \in \mathbb{Q} / a < r \le b$.

Dim. Facciamo vedere dapprima che $\forall x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, con $\varepsilon > 0$, $\exists r \in \mathbb{Q} / r \le x < r + \varepsilon$. Per il teorema 1, esiste un naturale d per cui $d > \frac{1}{\varepsilon}$ e quindi $\frac{1}{d} < \varepsilon$; inoltre per il teorema 2) $\exists p \in \mathbb{Z} / p \le xd < p+1$ e quindi $r \le x < r + \frac{1}{d} < r + \varepsilon$, con $r = \frac{p}{d}$. Allora si ha che $\exists r \in \mathbb{Q} / r \le b < r + (b-a)$. Quindi da $a = b - (b-a) < r$ segue la tesi.

Teorema 4) Sia a un numero irrazionale. Allora $\forall x \in \mathbb{Q} - \{0\}$ si ha che ax è un numero irrazionale.

Dim. Se ax è un numero razionale, allora anche $axx^{-1} = a$ lo sarà contro l'ipotesi.

Teorema 5) L'insieme dei numeri irrazionali è denso in $\mathbb{R}$.

Dim. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e ξ un irrazionale positivo. Allora $\exists r \in \mathbb{Q} / \frac{a}{\xi} < r \le \frac{b}{\xi}$. Segue che $r\xi$ è un irrazionale per cui $a < r\xi \le b$.