I numeri reali

Premesso che l'introduzione dei numeri reali e le regole che ne governano l'algebra può avvenire seguendo diversi metodi, in questi appunti utilizzeremo il metodo assiomatico. Definiremo e struttureremo dapprima i numeri interi non negativi (e, in particolare, i numeri naturali), per poi passare ai numeri interi relativi, quindi ai numeri razionali e, infine, ai numeri reali (attraverso l'introduzione dei numeri irrazionali).

Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}_0$ i cui elementi, detti numeri interi non negativi, identificheremo simbolicamente, per ora, con le lettere dell'alfabeto *a, b, c,* e così via. Definiamo la relazione cosiddetta di uguaglianza tra gli elementi di $\mathbb{N}_0$ che identificheremo con il simbolo "$=$":

***Definizione* 1**: dati due elementi *a* e *b* di $\mathbb{N}_0$, diremo che essi sono uguali, e scriveremo $a = b$, se i simboli *a* e *b* identificano lo stesso elemento di $\mathbb{N}_0$.

Stabiliamo tre assiomi (regole da accettare in quanto tali) per la relazione di uguaglianza:

1) $\forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a = a$ proprietà riflessiva[1];

2) $\forall a, b \in \mathbb{N}_0,\ a = b \Leftrightarrow b = a$ proprietà di simmetria;

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0,\ a = b \text{ e } b = c \Rightarrow a = c$ proprietà transitiva.

Introduciamo in $\mathbb{N}_0$ le operazioni di somma (+) e prodotto ($\cdot$) attraverso le quali gli elementi di $\mathbb{N}_0$ possono interagire tra loro e stabiliamo per tali operazioni i seguenti assiomi:

1) $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}_0$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}_0$ proprietà di chiusura di $\mathbb{N}_0$ rispetto alle operazioni di somma e di prodotto;

2) $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$ proprietà commutativa della somma e del prodotto;

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ proprietà associativa della somma e del prodotto;

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ proprietà distributiva;

5) $\exists 1 \in \mathbb{N}_0 / \forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 1 \cdot a = a$ esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto;

6) $\exists 0 \in \mathbb{N}_0 / \forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 0 + a = a$ esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma.

[1] Non tutte le relazioni soddisfano la proprietà riflessiva, come vedremo per esempio per la relazione ">" oppure "<".

Esercizio 1. Gli elementi neutri rispetto al prodotto e alla somma sono unici.

Dim. Sia $\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \,/\, \forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \varepsilon \cdot a = a$. Allora contemporaneamente si ha $\varepsilon = \varepsilon \cdot 1$ e $\varepsilon \cdot 1 = 1$. Quindi per la proprietà transitiva $\varepsilon = 1$.

Analogamente, sia $\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \,/\, \forall a \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \varepsilon + a = a$. Allora contemporaneamente si ha $\varepsilon = \varepsilon + 0$ e $\varepsilon + 0 = 0$. Quindi per la proprietà transitiva $\varepsilon = 0$.

In particolare, definiamo insieme dei numeri naturali, che indicheremo con il simbolo $\mathbb{N}$, il sottoinsieme di $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$) che si ottiene privando quest'ultimo dell'elemento neutro "0", cioè $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 - \{0\}$. Si ha quindi $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\mathbb{N} \cap \{0\} = \varnothing$. $\mathbb{N}$ soddisfa tutti gli assiomi formulati per $\mathbb{N}_0$ (basta ripetere gli assiomi sostituendo $\mathbb{N}_0$ con $\mathbb{N}$) tranne ovviamente l'assioma 6).

Esercizio 2. $\forall a \in \mathrm{N}_0 \Rightarrow 0 \cdot a = 0$.

Dim. Si ha $a = a \cdot 1 = a \cdot (1+0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0$, cioè (per la transitività) $a = a + a \cdot 0$. Quindi l'elemento $a \cdot 0$ agisce in N_0 come elemento neutro rispetto alla somma ma, per l'unicità dell'elemento neutro rispetto alla somma, si ha necessariamente $a \cdot 0 = 0$.

Finora gli unici elementi di N_0 che sono stati identificati con i classici simboli sono 0 e 1. Vediamo come si arriva ad assegnare i classici simboli anche a tutti i restanti elementi di N_0.

***Definizione* 2**: Per ogni elemento $a \in \mathbb{N}_0$, si definisce elemento successivo di a l'elemento $a+1 \in \mathbb{N}_0$.

Dall'assioma 6) segue che 1 è l'elemento successivo di 0, infatti si ha $0+1=1$.

Si identifica con il simbolo "2" l'elemento successivo di 1, cioè $1+1=2$. Occorre, tuttavia, dimostrare che tale elemento 2 sia diverso dai precedenti elementi introdotti finora, cioè 0 e 1. Sicuramente $2 \neq 0$ per l'assioma 1) (formulato in $\mathbb{N}$). Inoltre $2 \neq 1$ altrimenti 1 agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0).

Allo stesso modo si identifica con il simbolo "3" l'elemento successivo di 2, cioè $2+1=3$. Occorre, anche in tal caso, dimostrare che tale elemento 3 sia diverso dai precedenti elementi introdotti finora, cioè 0, 1 e 2. Sicuramente $3 \neq 0$ per l'assioma 1). Inoltre $3 \neq 1$ altrimenti 2 agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0) e nello stesso tempo $3 \neq 2$ altrimenti 1 agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0).

Ancora si identifica con il simbolo "4" l'elemento successivo di 3, cioè $3+1=4$. Occorre, anche in tal caso, dimostrare che tale elemento 4 sia diverso dai precedenti elementi introdotti finora, cioè 0, 1, 2 e 3. Sicuramente $4 \neq 0$ per l'assioma 1). Inoltre $4 \neq 1$ altrimenti 3 agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0) e nello stesso tempo

$4 \neq 3$ altrimenti 1 agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0). Bisogna dimostrare che $4 \neq 2$, ma si ha $4 = 3+1 = (2+1)+1 = 2+(1+1) = 2+2$ e quindi $4 \neq 2$ altrimenti 2 agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0).

In generale, sia *c* un elemento della catena ottenuto mediante i successivi a partire da 0;

$$0 — 1 — \ldots — a — a+1 — (a+1)+1 — \ldots — (\ldots((a+1)+1)+\ldots+1)+1 = a+\underbrace{(1+\cdots+1)}_{=b} = a+b = c$$

vogliamo dimostrare che esso non può coincidere con nessun elemento della catena precedente a *c*.

Infatti se $c = a$, allora si avrebbe $a+b = a$, e quindi *b* agirebbe come elemento neutro rispetto alla somma (e questo è impossibile per l'unicità di 0).

Potendo iterare all'infinito tale costruzione (che fa riferimento all'elemento successivo), si può dedurre che i numeri interi non negativi sono infiniti.

Si può dimostrare che, nell'insieme $\mathbb{N}_0$, 0 non è successivo di nessun elemento. Infatti se così non fosse esisterebbe un elemento $\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tale che $\varepsilon + 1 = 0$; ma questo è impossibile perché ε dovrebbe appartenere all'insieme $\mathbb{N}$ (non potendo essere nullo) e di conseguenza anche 0 (per la chiusura di $\mathbb{N}$ rispetto all'operazione di somma).

Per evitare l'esistenza di una ulteriore e diversa catena di nodi rappresentanti anch'essi dei numeri interi non negativi

$$0 ——— 1 ——— 2 ——— 3 ——— 4 \cdots$$

$$\varepsilon \in \mathrm{N}_0 ——— \varepsilon+1 ——— \varepsilon+2 \cdots$$

si stabilisce per l'insieme $\mathbb{N}_0$ un ulteriore assioma detto *Principio di Induzione:*

Principio di induzione. Sia $S \subseteq \mathbb{N}_0$. Allora, se $0 \in S$ e se $\forall a \in S \Rightarrow a+1 \in S$, si ha che $S \equiv \mathbb{N}_0$.

In tal modo, l'intera catena di numeri interi non negativi costruita con gli elementi successivi a partire da 0 è esaustiva grazie all'assioma del principio di induzione.

In generale, fissato un elemento $a \in \mathbb{N}_0$ non esiste un elemento $\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tale che $a + \varepsilon = 0$. Infatti sia, in particolare, $a \in \mathbb{N}$ (quindi diverso da 0). Se $\varepsilon = 0$ allora $a + \varepsilon = a$ (e $a \neq 0$ in quanto $a \in \mathbb{N}$); se $\varepsilon \neq 0$ allora $\varepsilon \in \mathbb{N}$ e quindi e $a + \varepsilon \neq 0$ in quanto $a + \varepsilon \in \mathbb{N}_0$.

Allora, definiamo al di fuori di $\mathbb{N}_0$ i seguenti elementi.

Definizione 3: $\forall a \in \mathrm{N}_0$, si definisce "elemento opposto" di *a* l'elemento "$-a$" tale che $a + (-a) = 0$.

Costruiamo, di conseguenza, un nuovo insieme che contenga, oltre ai numeri interi non negativi, i relativi elementi opposti. Denotiamo tale insieme con il simbolo $\mathbb{Z}$ (insieme dei numeri interi relativi).

Per $\mathbb{Z}$ si assumono veri gli stessi tre assiomi della relazione di uguaglianza e i sei assiomi operativi stabiliti per $\mathbb{N}_0$, con l'aggiunta del seguente.

7) $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists -a \in \mathbb{Z} / a+(-a)=0$ esistenza dell'elemento opposto.

Esercizio 3. L'elemento opposto di un dato elemento di $\mathbb{Z}$ è unico.

Dim. Fissato $a \in \mathbb{Z}$, sia $\varepsilon \in \mathbb{Z} / \varepsilon + a = 0$. Allora si ha $\varepsilon = \varepsilon + (a+(-a)) = (\varepsilon + a) + (-a) = -a$. Quindi per la proprietà transitiva $\varepsilon = -a$.

Esercizio 4. $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ sia $a+b=a+c$. Allora $b=c$ (legge di cancellazione o semplificazione).

Dim. $b = b+(a+(-a)) = (a+b)+(-a) = (a+c)+(-a) = c$. Quindi per la proprietà transitiva $b=c$.

Esercizio 5. $0=-0$

Dim. $-0=(-0)+0=0$. Quindi per la proprietà transitiva $0=-0$.

Esercizio 6. $\forall a \in \mathbb{Z}$, si ha $-(-a)=a$.

Dim. $a = a+((-a)+(-(-a))) = (a+(-a))+(-(-a)) = -(-a)$. Quindi per la proprietà transitiva $a=-(-a)$.

Esercizio 7. $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, si ha $a(-b)=(-a)b=-ab$.

Dim. $ab+(a(-b)) = a(b+(-b)) = a \cdot 0 = 0$. Quindi per l'unicità dell'elemento opposto $(a(-b)) = -ab$. Analogamente negli altri casi.

In $\mathbb{Z}$, e di conseguenza nei suoi sottoinsiemi $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{N}$, è possibile stabilire una relazione d’ordine tra i suoi elementi attraverso la seguente definizione:

Definizione 4. $\forall a,b \in \mathbb{Z}$, $a>b$ se $a+(-b) \in \mathbb{N}$.

L’insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (indicato anche con il simbolo $\mathbb{Z}^+$) viene anche detto insieme dei numeri interi positivi. L’insieme degli opposti di tutti i numeri naturali (indicato con il simbolo $\mathbb{Z}^-$) viene detto insieme dei numeri interi negativi. Analogamente si introduce anche il simbolo $\geq$ cosicché si ha

$$\forall a,b \in \mathbb{Z},\ a \geq b \text{ se } a+(-b) \in \mathbb{N}_0 .$$

Le relazioni d'ordine > e < non soddisfano la proprietà riflessiva né la proprietà simmetrica (si dicono anti-riflessive e anti-simmetriche) stabilite per la relazione di uguaglianza, mentre soddisfano la proprietà transitiva. Le relazioni d'ordine ≥ e ≤ non soddisfano la proprietà simmetrica, mentre soddisfano la proprietà riflessiva e la proprietà transitiva.

Esercizio 8. $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1 > a$. Infatti $(a+1)+(-a)=1 \in \mathbb{N}$.

Ogni elemento *a* di $\mathbb{Z}$ ha un elemento successivo $a+1$ e un elemento "precedente" $a+(-1)$ nel senso che *a* (compreso lo 0) rappresenta il successivo di $a+(-1)$.

Da quest'ultima osservazione e dall'esercizio 8 segue che i numeri interi, a partire dagli interi non negativi, possono essere disposti in modo "crescente" su una retta orientata da sinistra a destra (verso di crescenza), una volta fissata l'origine, in cui si posiziona lo 0. I numeri interi negativi si distribuiscono in modo simmetrico a quelli positivi rispetto l'origine.

Per costruzione $\mathbb{Z}$ è l'unione dei sottoinsiemi (disgiunti tra loro) $\mathbb{Z}^-$, $\{0\}$ e $\mathbb{N}$; segue quindi che $\forall a \in Z-\{0\}$ risulta $a \in \mathbb{N}$ oppure $-a \in \mathbb{N}$. Inoltre si può dimostrare che il sottoinsieme degli opposti di tutti i naturali (gli interi negativi $\mathbb{Z}^-$) è chiuso rispetto alle operazioni di somma; infatti:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}^- \quad \Rightarrow \quad 0=\left[a+(-a)\right]+\left[b+(-b)\right]=(a+b)+\left[(-a)+(-b)\right]$$

e per l'unicità dell'elemento opposto risulta $\left[(-a)+(-b)\right]=-(a+b)$.

Ma $\left[(-a)+(-b)\right] \in \mathbb{N}$ e quindi $-(a+b) \in \mathbb{N}$ da cui segue che $a+b \in \mathbb{Z}^-$.

Dal principio di induzione e dall'ordinamento dei numeri interi, possiamo asserire che tra un qualsiasi numero intero e il suo successivo non vi sono numeri interi. In tal senso diremo che $\mathbb{Z}$ è insieme numerico discreto.

Inoltre $\mathbb{Z}$ è numerabile; cioè è possibile, sfruttando il concetto di elemento successivo e il fatto che $\mathbb{N}$ contiene infiniti elementi, stabilire una corrispondenza biunivoca $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ che associa a ciascun numero naturale un solo numero intero e viceversa

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$
1	$\leftrightarrow$	0
2	$\leftrightarrow$	1
3	$\leftrightarrow$	-1
4	$\leftrightarrow$	2
5	$\leftrightarrow$	-2
6	$\leftrightarrow$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

In tal modo si stabilisce un possibile posizionamento (che non tiene conto della relazione d'ordine) dei numeri interi.

Facciamo ora vedere che, in generale, fissato un qualunque elemento $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ non esiste un elemento $\varepsilon \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tale che $a\varepsilon = 1$.

Infatti, consideriamo per esempio $a = 2$ e supponiamo per assurdo che esista un intero non nullo ε tale che $2\varepsilon = 1$. Ovviamente non può essere $\varepsilon = 1$. Allora si ha

$$1 = 2\varepsilon = (1+1)\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon$$

da cui segue, per la chiusura di $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ e di $\mathbb{Z}^-$, che $\varepsilon \in \mathbb{N}$ (in particolare, essendo diverso da 0 e 1, $\varepsilon > 1$), ed inoltre che $\varepsilon + (\varepsilon + (-1)) = 0$.

Ma, essendo $(\varepsilon + (-1)) \in \mathbb{N}$, si ha che risulta assurda la relazione $\varepsilon + (\varepsilon + (-1)) = 0$.

Allora, per ogni $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$, costruiamo al di fuori di $\mathbb{Z}$ l'elemento, che denoteremo con il simbolo "a^{-1}" (oppure con il simbolo "$\frac{1}{a}$") e chiameremo elemento inverso di *a*, tale che $aa^{-1} = 1$. Da questa costruzione ha origine la classica regola che il denominatore di una frazione deve essere non nullo.

Consideriamo, quindi, un nuovo insieme che contenga gli elementi inversi (così costruiti) di tutti gli elementi interi non nulli. Infine possiamo definire il seguente insieme

$$\mathbb{Q} = \{n \cdot d^{-1}, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall d \in \mathbb{Z} - \{0\}\}.$$

Il numero nd^{-1} si può scrivere in modo equivalente $\frac{n}{d}$ (*n* e *d* vengono detti numeratore e denominatore della frazione $\frac{n}{d}$). Risulta $1^{-1} = 1$, infatti (giocando sui ruoli di 1 e del suo inverso) $1 = 11^{-1} = 1^{-1}$. Si ha di conseguenza che $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Anche per l'insieme $\mathbb{Q}$ si stabilisce la validità dei tre assiomi della relazione di uguaglianza e dei sette assiomi di $\mathbb{Z}$ (si sostituisca $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$), con l'aggiunta del seguente:

8) $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \; \exists \; a^{-1} \in \mathbb{Q} - \{0\} \; / \; aa^{-1} = 1$, esistenza dell'elemento inverso.

Esercizio 9. L'elemento inverso di un dato elemento non nullo di $\mathbb{Q}$ è unico.

Dim. Fissato un elemento $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$, sia $\varepsilon \in \mathbb{Q} - \{0\} / \varepsilon a = 1$. Allora si ha

$\varepsilon = \varepsilon\left(aa^{-1}\right) = \left(\varepsilon a\right)a^{-1} = 1a^{-1} = a^{-1}$. Quindi per la proprietà transitiva $\varepsilon = a^{-1}$.

Esercizio 10. $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Dim. Si ha $\left(a^{-1}\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^{-1} 1 = \left(a^{-1}\right)^{-1}\left(aa^{-1}\right) = \left(\left(\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)a^{-1}\right)a = 1a = a$.

Esercizio 11. $\forall a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$, se $a = b \Rightarrow a^{-1} = b^{-1}$.

Dim. Si ha $a^{-1} = a^{-1}\left(bb^{-1}\right) = \left(a^{-1}b\right)b^{-1} = \left(a^{-1}a\right)b^{-1} = b^{-1}$.

Esercizio 12. $\forall a, b \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow \left(ab\right)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Dim. Si ha $\left(ab\right)\left(a^{-1}b^{-1}\right) = \left(aa^{-1}\right)\left(bb^{-1}\right) = 1 \Rightarrow \left(a^{-1}b^{-1}\right) = \left(ab\right)^{-1}$.

Usando la notazione equivalente, dall'esercizio precedente si può anche scrivere
$\left(n/d\right)^{-1} = \left(nd^{-1}\right)^{-1} = n^{-1}\left(d^{-1}\right)^{-1} = dn^{-1} = d/n$.

Gli otto assiomi stabiliti per $\mathbb{Q}$ si dicono assiomi di campo. In algebra tutti gli insiemi la cui struttura è caratterizzata da una assiomatica come quella dei numeri razionali si dicono "campi"; si usa dire in tal caso "campo dei numeri razionali".

Osserviamo come lo stesso numero razionale possa essere rappresentato da frazioni diverse; per esempio i numeri 2/3 e 4/6 coincidono, infatti

$$\frac{4}{6} = 4 \cdot 6^{-1} = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3)^{-1} = 2\left(2 \cdot 2^{-1}\right) \cdot (3)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

E' sempre possibile "semplificare la frazione in modo irriducibile ossia in modo tale che numeratore e denominatore non abbiano divisori in comune (siano tra loro "coprimi").

Facciamo vedere come si opera con la somma e il prodotto calcolando i numeri 2/3+5/2 e 2/3 · 5/2

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = 2 \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot 2^{-1} \cdot 2 \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 2^{-1} \cdot 3 \cdot 3^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{-1}\left(2 \cdot 2 + 5 \cdot 3\right) = 2^{-1} \cdot 3^{-1}\left(4 + 15\right) = \frac{19}{6}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 5 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot 5 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1} = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3)^{-1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Anche in $\mathbb{Q}$ è possibile stabilire una relazione d'ordine tra i suoi elementi mediante una opportuna assiomatica (detta appunto dell'odine). A tal proposito si definisce un particolare sottoinsieme $\mathbb{Q}^+$ di $\mathbb{Q}$, detto dei numeri razionali positivi, e si stabiliscono per esso i seguenti tre assiomi:

1) $\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}^+$ e $ab \in \mathbb{Q}^+$ (chiusura di $\mathbb{Q}^+$ rispetto le operazioni di somma e prodotto);
2) $\forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}^+$ oppure $-a \in \mathbb{Q}^+$;

3) $0 \notin \mathbb{Q}^+$.

Quindi stabiliamo una relazione d'ordine tra i numeri razionali al seguente modo:

Definizione 5. $\forall a,b \in \mathbb{Q}$, $a > b \overset{def}{\Rightarrow} a+(-b) \in \mathbb{Q}^+$;

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$, $a < b \overset{def}{\Rightarrow} b+(-a) \in \mathbb{Q}^+$;

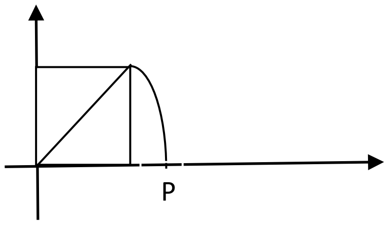
$\forall a,b \in \mathbb{Q}$, $a \geq b \overset{def}{\Rightarrow} a+(-b) \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$;

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$, $a \leq b \overset{def}{\Rightarrow} b+(-a) \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

L'insieme $\mathbb{Q}$, a differenza dell'insieme $\mathbb{Z}$, non è discreto. Infatti $\forall a,b \in \mathbb{Q}$, con $a < b$, esiste sempre un elemento intermedio $c \in \mathbb{Q}$, cioè tale che $a < c < b$; tale elemento è, per esempio, il punto medio $c = (a+b)/2$. In tal senso, diremo quindi che $\mathbb{Q}$ è un insieme denso ("in se stesso").

Il processo che consente di individuare il punto medio di due elementi razionali distinti, può proseguire all'infinito; quindi, preso sulla retta orientata un segmento di estremi razionali *a* e *b*, può sembrare che ogni punto interno del segmento possa essere rappresentato da un numero razionale. In tal senso potremmo allora affermare che $\mathbb{Q}$ non solo è denso, ma è anche continuo come lo sono i punti della retta orientata. In altre parole sembra che sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta orientata e i numeri razionali. Dimostreremo ora che non è così.

Consideriamo, nel piano cartesiano, il quadrato di lato 1 avente un vertice nell'origine e quello opposto nel punto di coordinate (1,1). Proiettiamo, quest'ultimo vertice, sulla retta orientata lungo un arco di circonferenza avente come raggio la diagonale del quadrato.



La distanza del punto proiezione P dall'origine (ascissa di P) è pari alla lunghezza della diagonale il cui quadrato, per il teorema di Pitagora, vale 2. Dimostriamo allora che non esiste nessun numero razionale il cui quadrato vale 2. Ciò avrà come conseguenza, il fatto che sulla retta orientata esistono punti, come P, che non possono essere rappresentati da numeri razionali. Avremo, quindi, bisogno di una nuova categoria di numeri in grado di rappresentare aritmeticamente punti come P.

Proposizione 1. Non esiste nessun numero razionale il cui quadrato vale 2.

Dim. Supponiamo che tale numero razionale esista; sia esso $r \in \mathbb{Q}$. Per cui $r = \frac{n}{d}$, con n e d numeri interi non nulli che stabiliamo essere coprimi tra loro. Allora, per ipotesi, si ha

$$\left(\frac{n}{d}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2d^2.$$

Il numero n^2 è divisibile per 2 e quindi anche il numero n. Infatti, se n non fosse divisibile per 2, non potrebbe esserlo nemmeno n^2 come mostra il seguente passaggio

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1.$$

Si ha quindi,

$$n = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2d^2 \Rightarrow d^2 = 2k^2 \Rightarrow d = 2h.$$

Si arriva alla conclusione che sia n che d sono divisibili per 2. Ma questo è in contraddizione con l'ipotesi che n e d sono tra loro coprimi.

Questo mostra anche, dal punto di vista geometrico, come le lunghezze della diagonale e del lato del quadrato siano tra loro incommensurabili, cioè non esiste un loro sottomultiplo in comune.

A supporto del fatto che i numeri razionali non siano in grado di rappresentare tutti i punti della retta orientata, vi è la seguente proprietà che assegna a $\mathbb{Q}$ la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$:

Proposizione 2. $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Dim: Sfruttando il concetto di elemento successivo e il fatto che $\mathbb{N}$ contiene infiniti elementi, possiamo considerare un algoritmo in grado di stabilire una corrispondenza biunivoca $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ che associa a ciascun numero naturale un solo numero razionale e viceversa.

Simbolicamente, possiamo rappresentare un numero razionale positivo a/b come la coppia ordinata (a,b) di numeri naturali. Associamo al numero 1 naturale lo 0 razionale (cioè posizioniamo lo 0 al primo posto). Fissiamo ora l'elemento successivo di 1, cioè 2, e consideriamo l'unica coppia di naturali $(1,1)$ la cui somma faccia 2. Tale coppia corrisponde al numero razionale 1 che posizioniamo al secondo posto. Al terzo posto posizioniamo l'opposto di 1.

Proseguiamo in modo analogo; fissiamo l'elemento successivo di 2, cioè 3, e consideriamo le uniche due coppie di naturali $(1,2) = 1/2$ e $(2,1) = 2$ la cui somma faccia 3. Posizioniamo allora ½ e 2 rispettivamente al quarto e al quinto posto e al sesto e settimo posto posizioniamo i loro opposti. Proseguendo all'infinito si posizioneranno tutti i numeri razionali.

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Q}$
1	$\leftrightarrow$	0
2	$\leftrightarrow$	1

3	$\leftrightarrow$	-1
4	$\leftrightarrow$	1/2
5	$\leftrightarrow$	2
6	$\leftrightarrow$	-1/2
7	$\leftrightarrow$	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

In tal modo si stabilisce un possibile posizionamento (che non tiene conto della relazione d'ordine) dei numeri razionali.

Affrontiamo ora il problema dell'estensione numerica che a partire dai razionali ci porta ai numeri reali attraverso la definizione dei numeri irrazionali e che abbia come obiettivo la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta orientata e questo nuovo insieme numerico. Consideriamo le seguenti definizioni:

Definizione 6. Sia $A \subset \mathbb{Q}$; allora, un numero razionale *M* si dice maggiorante del sottoinsieme *A* se

$$\forall a \in A \Rightarrow a \leq M.$$

Se un sottoinsieme $A \subset \mathbb{Q}$ ammette un maggiorante si dirà limitato superiormente altrimenti si dirà illimitato superiormente. Ovviamente se $A \subset \mathbb{Q}$ è limitato superiormente esso ammetterà infiniti maggioranti.

Esempio 1. 1/2 è un maggiorante per il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \leq 1/2\}$;

Esempio 2. 3/2 è un maggiorante per il sottoinsieme $B = \{x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x < 3/2\}$;

Esempio 3. 2 è un maggiorante per il sottoinsieme $C = \{x \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow x^2 < 2\}$;

Dim: $\forall x \in C \Rightarrow x^2 < 2 < 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

Esempio 4. il sottoinsieme $D = \{x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x > 1/2\}$ è illimitato superiormente.

Sia $A \subset \mathbb{Q}$ limitato superiormente. Ci chiediamo se tra tutti i suoi maggioranti ne esista uno che goda della proprietà si essere il più piccolo. In altri termini se esiste un numero razionale Λ che soddisfi le seguenti due proprietà:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq \Lambda$;

2) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists a \in A / a > \Lambda - \varepsilon$.

Se ciò accade, chiameremo tale numero *estremo superiore di A* e scriveremo $\Lambda = \sup A$.

Vediamo cosa si può dire in proposito per gli insiemi degli esempi sopra riportati.

Esempio 1. Si ha $\sup A = \frac{1}{2}$. Infatti la prima proprietà è verificata per definizione stessa di *A*. Per dimostrare la 2) basta constatare che $\frac{1}{2} \in A$ e $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$;

Esempio 2. Si ha $\sup B = \frac{3}{2}$. Infatti la prima proprietà è verificata per definizione stessa di *B*. Per la 2) basta constatare che, $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, tra $\frac{3}{2} - \varepsilon$ e $\frac{3}{2}$ ci sono infiniti elementi di *B* (per la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$).

Da tali esempi è intuitivo constatare che ogni numero razionale *n/d* può essere considerato estremo superiore del sottoinsieme $\{x \in \mathbb{Q} / x \leq n/d\}$ di $\mathbb{Q}$, limitato superiormente.

Dimostriamo ora che l'insieme *C*, dell'esempio 3), non ammette estremo superiore razionale, facendo vedere che se affermassimo la sua esistenza si cadrebbe in un assurdo. Ammettiamo allora che $\Lambda = \sup C \in \mathbb{Q}^+$. Per quanto dimostrato in precedenza, relativamente alla inesistenza di un numero razionale *r* tale che $r^2 = 2$, dovrà necessariamente essere $\Lambda^2 \neq 2$.

Supponiamo che $\Lambda^2 < 2$, da cui segue $\Lambda \in C$; dimostriamo l'esistenza di un numero razionale positivo ε, con $\varepsilon < 1$, tale che $(\Lambda + \varepsilon)^2 < 2$, e quindi tale che $(\Lambda + \varepsilon) \in C$, in contraddizione con il fatto che Λ rappresenta un maggiorante di *C*. Si ha

$$(\Lambda + \varepsilon)^2 < 2 \;\Rightarrow\; \Lambda^2 + 2\Lambda\varepsilon + \varepsilon^2 < 2 \;\Rightarrow\; \varepsilon(2\Lambda + \varepsilon) < 2 - \Lambda^2,$$

ma se $\varepsilon(2\Lambda + 1) < 2 - \Lambda^2$, cioè $\varepsilon < \frac{2 - \Lambda^2}{2\Lambda + 1}$ allora segue $\varepsilon(2\Lambda + \varepsilon) < \varepsilon(2\Lambda + 1) < 2 - \Lambda^2$.

Per la densità di $\mathbb{Q}$ esistono infiniti razionali positivi ε tali che $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{2 - \Lambda^2}{2\Lambda + 1}, 1\right\}$. Quindi è impossibile che si abbia $\Lambda^2 < 2$.

Supponiamo ora che $\Lambda^2 > 2$; dimostriamo l'esistenza di un numero razionale positivo ε, con $\varepsilon < 1$, tale che $(\Lambda - \varepsilon)^2 > 2$, e quindi tale che anche $(\Lambda - \varepsilon)$ sia maggiorante di C[2] in contraddizione con il fatto che Λ rappresenta il più piccolo dei maggioranti di *C*.

Si ha

$$(\Lambda - \varepsilon)^2 > 2 \;\Rightarrow\; \Lambda^2 - 2\Lambda\varepsilon + \varepsilon^2 > 2 \;\Rightarrow\; \varepsilon(2\Lambda - \varepsilon) < \Lambda^2 - 2$$

---

[2] Infatti, $\forall x \in C$ e per ogni razionale positivo y tale che $2 < y^2$, si ha $x^2 < 2 < y^2$ e quindi

$\Rightarrow\; y^2 - x^2 > 0 \;\Rightarrow\; (y + x)(y - x) > 0 \;\Rightarrow\; y - x > 0$.

ma se $\varepsilon 2\Lambda < \Lambda^2 - 2$, cioè $\varepsilon < \dfrac{\Lambda^2 - 2}{2\Lambda}$ allora segue $\varepsilon(2\Lambda - \varepsilon) < 2\Lambda\varepsilon < \Lambda^2 - 2$.

Per la densità di $\mathbb{Q}$ esistono infiniti razionali positivi ε tali che $0 < \varepsilon < \dfrac{\Lambda^2 - 2}{2\Lambda}$. Quindi è impossibile che si abbia $\Lambda^2 > 2$.

Come conseguenza a questo esempio possiamo stabilire che, a partire da un sottoinsieme limitato $A \subset \mathbb{Q}$, l'elemento che rappresenta il suo estremo superiore è un numero razionale altrimenti (se non lo è) è un ente numerico nuovo che chiameremo numero irrazionale. Chiameremo insieme dei numeri reali (che indicheremo con il simbolo $\mathbb{R}$) l'unione tra l'insieme $\mathbb{Q}$ e l'insieme $\mathbb{I}$ dei numeri irrazionali,

$$\mathbb{R} = \{\sup A : A \subset \mathbb{Q} \text{ lim.sup.}\}.$$

Quindi si ha $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Per dotare $\mathbb{R}$ di una assiomatica, estendiamo il concetto di estremo superiore a questo nuovo insieme.

Definizione 7. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Un numero reale *M* si dice maggiorante dell'insieme *A* se

$$\forall a \in A \Rightarrow a \leq M.$$

Se un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette un maggiorante si dirà limitato superiormente altrimenti si dirà illimitato superiormente. Ovviamente se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente esso ammetterà infiniti maggioranti.

Definizione 8. Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente; definiamo estremo superiore di *A* il numero reale $\Lambda = \sup A$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq \Lambda$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in A / a > \Lambda - \varepsilon$.

Definizione 9. In particolare, definiamo massimo assoluto di *A* il numero reale $M = \max A$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \leq M$;

2) $M \in A$.

Il massimo assoluto di un sottoinsieme *A*, qualora esista, coincide con l'estremo superiore di A; infatti si può dimostrare che la condizione 2) del max implica la condizione 2) del sup. Non è vero il viceversa.

E' possibile definire, in maniera simmetrica, anche l'estremo inferiore e il minimo assoluto di un sottoinsieme:

Definizione 10. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Un numero reale m si dice minorante dell'insieme A se

$$\forall a \in A \Rightarrow a \geq m.$$

Se un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ ammette un minorante si dirà limitato inferiormente altrimenti si dirà illimitato inferiormente. Ovviamente se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente esso ammetterà infiniti minoranti.

Definizione 11. Sia $A \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente; definiamo estremo inferiore di A il numero reale $\lambda = \inf A$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \geq \lambda$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in A / a < \lambda + \varepsilon$.

Definizione 12. In particolare, definiamo minimo assoluto di A il numero reale $m = \min A$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1) $\forall a \in A \Rightarrow a \geq m$;

2) $m \in A$.

Il minimo assoluto di un sottoinsieme, qualora esista, coincide con l'estremo inferiore dello stesso; infatti si può dimostrare che la condizione 2) del min implica la condizione 2) del max. Non è vero il viceversa.

Si dimostra anche facilmente che l'estremo sup. e inf. di un sottoinsieme limitato (e quindi anche il max e min, se esistono) sono unici.

Tutti gli assiomi stabiliti per l'insieme $\mathbb{Q}$, sia quelli della relazione di uguaglianza, quelli algebrici di campo e quelli dell'ordine (in tal caso si introduce il sottoinsieme dei numeri reali positivi $\mathbb{R}^+$), si estendono all'insieme $\mathbb{R}$. In aggiunta si stabilisce per $\mathbb{R}$ il seguente assioma cosiddetto di completezza:

Assioma di completezza. Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente (inferiormente), ammette estremo superiore (inferiore).

Vediamo infine alcune conseguenze dell'assioma di completezza.

Teorema 1. L'insieme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è illimitato superiormente.

Dim: Supponiamo, per assurdo, che $\mathbb{N}$ sia limitato superiormente, allora per l'assioma di completezza ammetterebbe l'estremo superiore $\Lambda = \sup \mathbb{N}$. Quindi

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \Lambda .$$

Tuttavia, siccome $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$, risulterebbe

$$n+1 \leq \Lambda$$

e quindi

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \le \Lambda - 1.$$

$\Lambda - 1$ risulterebbe un maggiorante di $\mathbb{N}$ contro l'ipotesi che Λ è il più piccolo dei maggioranti.

Corollario 1 - Proprietà archimedea. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \ \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, an > b$.

Dim: in caso contrario esisterebbe una coppia $a, b \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si avrebbe $an \le b$ ovvero $n \le b/a$ in contraddizione con l'illimitatezza superiore di $\mathbb{N}$.

L'assioma di completezza ci permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta orientata e i numeri reali. Dimostriamo infatti che ad ogni punto *P* della retta orientata corrisponde un unico numero reale che lo rappresenta numericamente. Consideriamo, a tal proposito, l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x \text{ è l'ascissa di un punto della retta orientata a sinistra di P} \right\}.$$

A è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, e quindi di $\mathbb{R}$, limitato superiormente e quindi dotato di estremo superiore Λ. Tale numero reale, che sappiamo essere unico, viene associato al punto P e ne rappresenterà l'ascissa.

Esistono altre forme equivalenti per enunciare l'assioma di completezza; la più nota è quella che fa riferimento alle sezioni di Dedekind.

Nel caso visto della proiezione dell'estremo P della diagonale del quadrato sull'asse orientato, l'ascissa di P è quel numero reale Λ che, non potendo avere quadrato strettamente maggiore o minore di 2, soddisferà la relazione $\Lambda^2 = 2$, cioè $\Lambda = \sqrt{2}$.

Più precisamente, sia $A = \left\{ x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2 \right\}$. *A* è un sottoinsieme non vuoto (per esempio $1 \in A$) e limitato superiormente, per esempio 2 è un maggiorante di *A*, perché

$\forall x \in A$, si ha:

$$x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow 4 - x^2 > 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x) > 0 \Rightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow 2 > x.$$

Allora, per l'assioma di completezza esiste un unico numero reale Λ tale che $\Lambda = \sup A$. Per quanto visto in precedenza, non si può avere $\Lambda^2 < 2$ altrimenti Λ non sarebbe un maggiorante di *A*, né si può avere $\Lambda^2 > 2$ altrimenti Λ non sarebbe il più piccolo dei maggioranti. In conclusione si avrà l'identità $\Lambda^2 = 2$ e non potendo essere razionale, esso apparterrà alla nuova categoria dei numeri irrazionali.

Abbiamo visto che l'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in se stesso. Sfruttando la proprietà archimedea dimostreremo che $\mathbb{Q}$ è denso anche in $\mathbb{R}$ cioè:

Teorema 2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \exists q \in \mathbb{Q} \ / \ x < q < y$.

Dim: Consideriamo prima il caso in cui $0 < x < y$. Applichiamo la proprietà archimedea ai numeri reali positivi 1 e $y - x$: esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n(y-x) > 1. \qquad (*)$$

Applichiamo, di nuovo, la proprietà archimedea ai numeri reali positivi 1/n e x: esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{\bar{k}}{n} > x \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{k}}{n} \geq x.$$

Ovviamente $\forall k > \bar{k}$ si ha $\dfrac{k}{n} > x$

Consideriamo l'insieme $A = \left\{ k \in \mathbb{N} : \dfrac{k}{n} \leq x \right\}$. Poiché esso e costituito da un numero finito di elementi possiamo definire il suo massimo assoluto $K = \max A$. Risulta quindi

$$\frac{K}{n} \leq x < \frac{K+1}{n} = \frac{K}{n} + \frac{1}{n} \qquad (**)$$

Per la (*) si ha

$$x < \frac{K}{n} + \frac{1}{n} < \frac{K}{n} + y - x$$

E per la prima disuguaglianza della (**)

$$x < \frac{K}{n} + \frac{1}{n} < \frac{K}{n} + y - x < x + y - x = y.$$

Abbiamo, in definitiva costruito il numero razionale $q = \dfrac{K}{n} + \dfrac{1}{n}$ che soddisfa la tesi.

Il caso $x < 0 < y$. È banale: basta prendere $q = 0$.

Il caso $x < y < 0$ si riconduce al primo; basta considerare che $0 < -y < -x$ e quindi esiste un razionale $q = \dfrac{K}{n} + \dfrac{1}{n}$ tale che $-y < q < -x$ da cui segue che $-x < -q < y$.

Teorema 3. Sia *a* un numero irrazionale. Allora $\forall q \in \mathbb{Q} - \{0\}$ si ha $aq \in \mathbb{I}$.

Dim: Supponiamo per assurdo che $aq \in \mathbb{Q}$. Allora, essendo anche $q^{-1} \in \mathbb{Q}$ si avrebbe $a = (aq)q^{-1} \in \mathbb{Q}$ contro l'ipotesi.

Teorema 4. $\mathbb{I}$ è denso anche $\mathbb{R}$ cioè: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists \xi \in \mathbb{I} \,/\, x < \xi < y$.

Dim: Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, fissato un qualsiasi numero irrazionale positivo ζ, segue l'esistenza di un numero razionale q tale che $\frac{x}{\zeta} < q < \frac{y}{\zeta}$. Allora il numero irrazionale $\xi = q\zeta$ soddisfa la tesi.

Facciamo infine vedere che, a differenza di $\mathbb{Q}$, che pur essendo denso in $\mathbb{R}$ risulta numerabile, $\mathbb{I}$ (e quindi in $\mathbb{R}$) non è numerabile.

Metodo delle diagonale di Cantor. Ci basta dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali compresi tra 0 e 1 non è numerabile. Supponiamo che esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri irrazionali compresi tra 0 e 1,

$\mathbb{N}$		$\mathbb{I} \cap (0,1)$
1	$\leftrightarrow$	$0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5}\dots$
2	$\leftrightarrow$	$0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}a_{2,5}\dots$
3	$\leftrightarrow$	$0, a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}a_{3,5}\dots$
4	$\leftrightarrow$	$0, a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}a_{4,5}\dots$
5	$\leftrightarrow$	$0, a_{5,1}a_{5,2}a_{5,3}a_{5,4}a_{5,5}\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ovviamente, per essere una corrispondenza biunivoca, la colonna di destra deve contenere tutti i numeri irrazionali compresi tra 0 e 1 espressi in forma decimale. Tuttavia è possibile costruire un numero irrazionale compreso tra 0 e 1 non presente nella colonna, infatti sia

$$a'_{1,1} \neq a_{1,1};\ a'_{2,2} \neq a_{2,2};\ a'_{3,3} \neq a_{3,3};\ a'_{4,4} \neq a_{4,4};\ a'_{5,5} \neq a_{5,5} \text{ e così via;}$$

sicuramente il numero $0, a'_{1,1}a'_{2,2}a'_{3,3}a'_{4,4}a'_{5,5}\dots$ è un irrazionale compreso tra 0 e 1 diverso da tutti i numeri della seconda colonna. Quindi l'affermazione che la tabella sopra costruita fornisca una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{I} \cap (0,1)$ è falsa.

Possiamo stabilire di conseguenza la cardinalità di $\mathbb{I} \cap (0,1)$ è maggiore di quella di $\mathbb{N}$.