1. Dimostrare che per ogni $x \in (0, +\infty)$ la funzione $g(x) = x - 1 - x\log x$ è non positiva ($g(x) \leq 0$). Quindi, dimostrare che per ogni $x \in (0, 1)$ la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x-1}$ risulta maggiore strettamente di 1 ($f(x) > 1$).

Si ha $g'(x) = -\log x$. Dal segno di tale funzione si deduce che g ammette un massimo nel punto $x = 1$ e si ha $g(1) = 0$; segue che per ogni $x \in (0, +\infty)$ $g(x) \leq 0$.
Si ha $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\left(x-1\right)^2}$. Dal segno di tale funzione si deduce che f è strettamente decrescente in $(0, 1)$. Poiché $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1$, segue che per ogni $x \in (0, 1)$ $f(x) > 1$.

2. Studiare l'invertibilità della funzione $f(x) = \sin\left(\pi + e^x\right)$ rispettivamente nell'intervallo $I_1 = \left[\log\dfrac{\pi}{2}, \log\dfrac{3\pi}{2}\right]$ e $I_2 = \left[\log\pi, \log 2\pi\right]$.

Si ha $f'(x) = e^x\cos\left(\pi + e^x\right)$. Tale funzione risulta non negativa per $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi + e^x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ cioè $-\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq e^x \leq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ e quindi

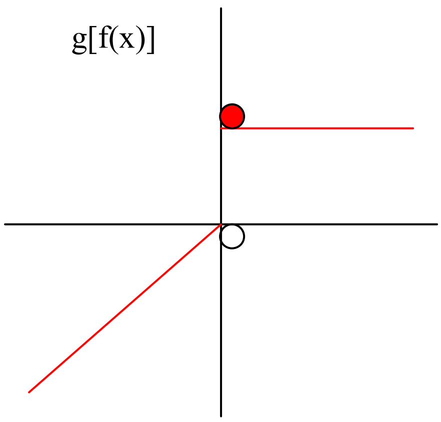
$$\log\left(-\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \leq x \leq \log\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{N}.$$

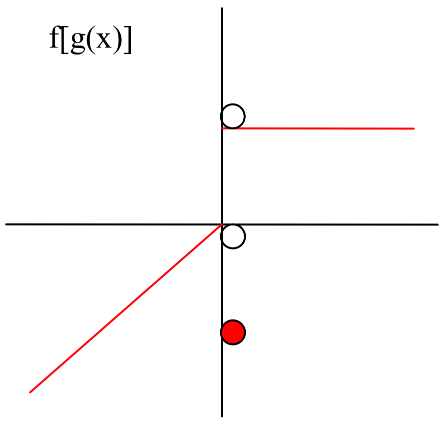
Per $k = 1$ si ottiene allora che la derivata di f è non negativa nell'intervallo $\left[\log\dfrac{\pi}{2}, \log\dfrac{3\pi}{2}\right]$ annullandosi solo agli estremi; segue che f sarà in tale intervallo strettamente monotona e quindi ivi invertibile. Poiché la derivata di f cambia di segno nell'intervallo $I_2 = \left[\log\pi, \log 2\pi\right]$ non può essere ivi iniettiva.

3. Siano $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Disegnare il grafico delle funzioni composte $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

$$f\left[g(x)\right] = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) < 0 \\ 1 & \text{se } g(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g\left[f(x)\right] = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \neq 0 \\ -1 & \text{se } f(x) = 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{mai} \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$





4. Sia *f* illimitata inferiormente e decrescente nel rispettivo dominio (illimitato superiormente). Dimostrare, mediante la definizione di funzione divergente, che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Il risultato continua a valere senza l'ipotesi della decrescenza?

5. Denotiamo con D_f il dominio di *f*. Poiché f è illimitata inferiormente allora $\forall M > 0\ \exists x_M \in D_f \,/\, f(x_M) < -M$ esiste (altrimenti sarebbe limitata inf.). Inoltre, essendo f decrescente in D_f si ha che $\forall x \in D_f\ con\ x > x_M \Rightarrow f(x) < f(x_M) < -M$. Riassumendo si ha $\forall M > 0\ \exists x_M > 0 \,/\, \forall x \in D_f\ con\ x > x_M \Rightarrow f(x) < -M$ che equivale a scrivere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Senza l'ipotesi della decrescenza il risultato in generale non vale. Infatti la funzione $f(x) = \log x$ è illimitata inf. ma non diverge a $-\infty$ per $x \to +\infty$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE - Facoltà di Ingegneria
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1
Collegio Didattico di Ingegneria Meccanica - 11 gennaio 2007

Cognome e nome ____

Autorizzo ad esporre il mio nome nell'elenco degli elaborati sufficienti. Firma ________________

Anno di immatricolazione: 2006 2005 prima del 2005

1. Dimostrare che per ogni $x \in (0\,,+\infty)$ la funzione $g(x) = 1 + x\log x - x$ è non negativa ($g(x) \geq 0$). Quindi, dimostrare che per ogni $x \in (1,+\infty)$ la funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x-1}$ risulta minore strettamente di 1 ($f(x) < 1$).

2. Studiare l'invertibilità della funzione $f(x) = \cos\left(\pi + e^x\right)$ rispettivamente nell'intervallo $I_1 = \left[\log\dfrac{\pi}{2}, \log\dfrac{3\pi}{2}\right]$ e $I_2 = [\log\pi, \log 2\pi]$

3. Siano $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Disegnare il grafico delle funzioni composte $f\,[g\,(x)]$ e $g\,[f\,(x)]$.

4. Sia f illimitata superiormente e crescente nel rispettivo dominio (illimitato superiormente). Dimostrare, mediante la definizione di funzione divergente, che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Il risultato continua a valere senza l'ipotesi della crescenza?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE - Facoltà di Ingegneria
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2
Collegio Didattico di Ingegneria Meccanica - 11 gennaio 2007

Cognome e nome ____

Acconsento al trattamento dei miei dati per le attività connesse. Firma ______________________

Anno di immatricolazione: $\boxed{2005}$ $\boxed{2004}$ $\boxed{\text{prima del 2004}}$

1. Determinare l'equazione differenziale che ha come integrale generale la seguente funzione $y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x\right)$, $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{C}$.

2. Calcolare il dominio e l'espressione esplicita della seguente funzione $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + \frac{37}{4}}}$.

3. Sia $f(x) = o[g(x)]$ e $g(x) = o[h(x)]$ entrambe per $x \to x_0$. Stabilire, dimostrandolo, se siano vere o false le seguenti affermazioni: $f(x) = o[h(x)]$ per $x \to x_0$, $f(x) = o[g(x)h(x)]$ per $x \to x_0$.

4. Sia $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie a termini di segno positivo e $l > 1$. Dimostrare che se $\forall \varepsilon > 0$ si ha $\sqrt[k]{a_k} > l -$ allora la serie diverge.