1. Dimostrare che l'equazione $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t+1}}\,dt = 2$ non ammette soluzioni reali nell'intervallo [0 , 2].

Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t+1}}\,dt - 2$. La tesi equivale a dimostrare la funzione *f* non ammette zeri nell'intervallo [0 , 2]. Ora si ha $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x+1}} \geq 0 \quad \forall x \in [0,2]$ (la derivata si annulla solo in 0), da cui segue la crescenza di *f* nell'intervallo [0 , 2], e $f(0) = -2$. Basta quindi verificare che $f(2) < 0$. Ma $f(2) = \int_0^2 \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t+1}}\,dt - 2 \leq \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt - 2 = 2\left(\sqrt{3}-1\right) - 2 = 2\sqrt{3} - 4 < 0$.

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 9y = e^{kx}$ al variare del parametro reale *k*.
L'equazione algebrica associata all'omogenea è $\alpha^2 - 9 = 0$ che ammette due soluzioni reali e distinte ± 3. L'integrale generale dell'omogenea è allora $y_{omog} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per determinare una soluzione particolare della non omogenea occorre distinguere i casi $k \neq \pm 3$ e $k = \pm 3$. Nel primo caso l'espressione della soluzione particolare è $y_p = Ae^{kx}$. Derivando due volte tale funzione e sostituendo y_p e y_p'' nell'equazione differenziale si ottiene la relazione $k^2 Ae^{kx} - 9Ae^{kx} = e^{kx}$ da cui si ottiene $A = 1/(k^2 - 9)$. Nel secondo caso l'espressione della soluzione particolare è $y_p = Axe^{\pm 3x}$. Derivando due volte tale funzione e sostituendo y_p e y_p'' nell'equazione differenziale si ottiene la relazione $\pm 6Ae^{\pm 3x} = e^{\pm 3x}$ da cui si ottiene $A = \pm 1/6$. Quindi si ottiene il seguente integrale generale $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y = \begin{cases} c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \dfrac{e^{kx}}{k^2 - 9} & se\ k \neq \pm 3 \\ c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \dfrac{e^{3x}}{6} & se\ k = 3 \\ c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \dfrac{e^{-3x}}{6} & se\ k = -3 \end{cases}.$$

3. Studiare, mediante la definizione, la derivabilità della funzione $f(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ rispetto ad *x* ed *y* nell'origine.

Si ha $\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\sqrt{h^2}\right) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos|h| - 1}{h} = \frac{0}{0}$. Studiando il limite destro e sinistro, e applicando la regola di De l'Hospital si ottiene

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h \to 0^+} \sin h = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos(-h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \sin h = 0.$$

Quindi la funzione ammette derivata rispetto ad *x* nell'origine e si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Analogamente si ha $\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos|h|-1}{h}=0$.

Quindi la funzione ammette derivata rispetto ad y nell'origine e si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

4. Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serie a termini positivi convergenti. Dimostrare, usando la definizione, che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$ converge.

Siano $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ le successioni delle somme parziali delle serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ rispettivamente, e $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali delle serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k$. Occorre dimostrare che la successione $\{S_n\}$ converge. Si ha $S_n < A_n B_n$, infatti

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n<\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)=\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k = A_n B_n$$

(la maggiorazione segue dall'ipotesi che le serie sono a termini positivi). Dal teorema del confronto per le successioni numeriche e dalla convergenza delle successioni $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ segue che la successione $\{S_n\}$ non può divergere. Inoltre $\{S_n\}$, essendo monotona crescente, è una successione regolare, di conseguenza deve necessariamente convergere.