1. Studiare, al variare di x in R, il carattere della serie $\sum_{k=0}^{\infty}(|x+2|-1)^k$.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $|x+2|-1$. Studiamo allora la disequazione $-1<|x+2|-1<1 \Rightarrow 0<|x+2|<2 \Rightarrow -2<x+2<2$ con $x \neq -2 \Rightarrow -4<x<0$ con $x \neq -2$.
In conclusione, per tali valori di x, si ottiene la convergenza della serie. Ovviamente la serie risulta divergente per ogni $x \leq -4$ e per ogni $x \geq 0$. La serie è indeterminata per $x=-2$.

2. Stabilire se l'equazione $\int_0^x \frac{\arccos t}{\sqrt{t+1}}\,dt=\pi$ ammette soluzioni reali nell'intervallo [0 , 1]. In caso affermativo stabilirne il numero.

Sia $f(x)=\int_0^x \frac{\arccos t}{\sqrt{t+1}}\,dt-\pi$. Si ha $f'(x)=\frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}}>0 \quad \forall x \in [0,1)$ da cui segue la crescenza di f in [0 , 1]. Inoltre $f(0)=-\pi$ e $f(1)=\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t+1}}\,dt-\pi \leq \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+1}}-\pi=\pi\left(\sqrt{2}-2\right)<0$. Si deduce, quindi, che il grafico di f non interseca l'asse delle ascisse nell'intervallo [0 , 1] e di conseguenza che l'equazione non ammette soluzioni reali nell'intervallo [0 , 1].

3. Si dimostri che se le serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergono, allora converge anche la serie $b_1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_{n+1}$.

Siano $\{A_k\}$, $\{B_k\}$ e $\{C_k\}$ le successioni delle somme parziali delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $b_1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_{n+1}$ rispettivamente. Poiché le serie sono a termini positivi, si ottiene

$$C_k=b_1+\sum_{n=1}^{k} a_n \cdot b_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{k} a_n \cdot \sum_{n=1}^{k} b_n=A_k B_k .$$

Dal teorema del confronto per le successioni numeriche e dalla convergenza delle successioni $\{A_k\}$ e $\{B_k\}$ segue che la successione $\{C_k\}$ non può divergere. Inoltre $\{C_k\}$, essendo monotona crescente, è una successione regolare. Di conseguenza deve necessariamente convergere.

4. Dimostrare l'espressione del resto della formula di Taylor mediante l'o piccolo. Calcolare, mediante tale formula $\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{1-\cos x}}{x^2}$.

Si ha $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$ per $x \to 0$, e $e^t=1+t+o(t)$ per $t \to 0$. Allora per la funzione composta si ottiene $e^{1-\cos x}=e^{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$ per $x \to 0$. Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{1-\cos x}}{x^2}=\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2}=\lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)=-\frac{1}{2}.$$

5. Sia $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|<1,|y|<1\right\}\cup\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2/1\le x<2\right\}$. Calcolare l'insieme dei punti interni, di frontiera e di accumulazione di *A*. Stabilire inoltre se *A* sia un insieme chiuso o aperto.

A è il quadrato del piano cartesiano centrato nell'origine e con i vertici nei punti di coordinate $(1,1),(1,-1),(-1,-1),(-1,1)$ esclusi i quattro lati, unito con il segmento del piano cartesiano che unisce i punti di coordinate $(1,1),(2,2)$ (primo punto incluso, secondo punto escluso). Si ha

$$\overset{\circ}{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|<1 \text{ e } |y|<1\right\},$$

$$\partial A=\left\{(\pm1,y)\in\mathbb{R}^2/\ |y|\le1\right\}\cup\left\{(x,\pm1)\in\mathbb{R}^2/\ |x|\le1\right\}\cup\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2/1<x\le2\right\},$$

$$\mathrm{D}A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/|x|\le1 \text{ e } |y|\le1\right\}\cup\left\{(x,x)\in\mathbb{R}^2/1\le x\le2\right\}.$$

Inoltre *A* non è né chiuso né aperto.