1. Calcolare, al variare del parametro reale m>0, $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|^m}{x^m-1}$.

Si ha $\frac{|x-1|^m}{x^m-1}=\begin{cases}\frac{(x-1)^m}{x^m-1} & x>1\\ \frac{(1-x)^m}{x^m-1} & x<1\end{cases}$. Quindi per ogni m>0 segue $\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|^m}{x^m-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^m}{x^m-1}=\frac{0}{0}$.

Applicando la regola di De l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^{m-1}}{x^{m-1}}=\begin{cases}+\infty & \text{se } 0<m<1\\ 1 & \text{se } m=1\\ 0 & \text{se } m>1\end{cases}$.

Analogamente per ogni m>0 si ha $\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|^m}{x^m-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^m}{x^m-1}=\frac{0}{0}$. Applicando la regola di De l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to 1^-}-\frac{(1-x)^{m-1}}{x^{m-1}}=\begin{cases}-\infty & \text{se } 0<m<1\\ -1 & \text{se } m=1\\ 0 & \text{se } m>1\end{cases}$. In conclusione si ottiene che $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|^m}{x^m-1}=\begin{cases}\nexists & \text{se } 0<m\le 1\\ 0 & \text{se } m>1\end{cases}$.

2. Studiare (giustificando le risposte) il comportamento al limite delle due successioni numeriche $a_n=\operatorname{sen} n+\sqrt{1-3n+n^2}$ e $b_n=(\operatorname{sen} n)\sqrt{1-3n+n^2}$.
Si ha $\forall n\in \mathrm{N},\ -1+\sqrt{1-3n+n^2}\le a_n$. Poiché $\lim_{n\to+\infty}-1+\sqrt{1-3n+n^2}=+\infty$, segue per il teorema del confronto che $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$. Mentre il grafico della funzione associata $b(x)$ alla successione b_n tocca, periodicamente per $n\to+\infty$, quello dei grafici delle funzioni $-\sqrt{1-3x+x^2}$ e $\sqrt{1-3x+x^2}$ che divergono a $-\infty$ e a $+\infty$ rispettivamente. Da queste informazioni sul grafico di $b(x)$, segue l'irregolarità di b_n.

3. Dimostrare che l'equazione $x^6+x^5+2x^4-7=0$ ammette esattamente due radici reali, una positiva ed una negativa.
Sia $f(x)=x^6+x^5+2x^4-7$. Si ha $f'(x)=6x^5+5x^4+8x^3$. f' ammette come unico zero reale il punto $x=0$ che rappresenta un punto di minimo assoluto per f, in quanto $f'(x)<0$ per $x<0$ e $f'(x)>0$ per $x>0$. Dalla continuità f e dal fatto che $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, segue che il grafico di f interseca una sola volta l'asse reale negativo e sola volta l'asse reale positivo.

4. Sia c = inf A con A illimitato superiormente. Allora $\forall\ \varepsilon>0$ si ha $c+\varepsilon\in A$. Dire se questa affermazione è vera o falsa (giustificare la risposta).
Un controesempio che confuta l'affermazione può essere il seguente. Sia A = **N** (insieme dei numeri naturali). Si ha ovviamente c = 1. Basta allora prendere ε = ½ affinché 1 + ½ ∉ A.