SERIE DI FOURIER

Funzioni periodiche

Definizione 1: Una funzione definita in R si dice periodica di periodo T se, $\forall x \in R$, si ha $f(x+T)=f(x)$.

Una funzione periodica di periodo T sarà completamente nota una volta che sia conosciuta in un intervallo $[a, a+T)$, di ampiezza T, viceversa ogni funzione f definita in $[a, a+T)$ potrà essere prolungata su tutto R a una funzione periodica, di periodo T, che indicheremo con $f^*(x)$.

E' evidente che, anche nel caso in cui la funzione f risulti regolare (di classe C^1) in $[a, a+T)$, non si potrà supporre che la funzione prolungata $f^*(x)$ sia continua; in generale vi sarà un salto nei punti $a+kT, \quad \forall k \in Z$ di ampiezza $s=\left|\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to (a+T)^-} f(x)\right|$.

Esempio 1. Sia $f(x)$ la restrizione all'intervallo $[-\pi, \pi)$ della funzione x. La funzione prolungata $f^*(x)$ avrà infiniti punti di salto nei punti $-\pi + 2k\pi$, $\forall k \in Z$, di ampiezza 2π.

Definizione 2: Una funzione $f(x)$ si dice continua a tratti in un intervallo $[a, b)$ se è ivi continua tranne al più in un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_N$ nei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro:

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i^-} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_i + 0) = \lim_{x \to x_i^+} f(x) \quad \text{per} \;\; i = 1, \ldots, N.$$

Definizione 3: Una funzione $f(x)$ si dice regolare a tratti in $[a, b)$ se è ivi continua a tratti ed ha derivata continua tranne che nei punti $x_1, \ldots, x_N$ in cui non è continua ed, eventualmente, in altri punti $y_1, \ldots, y_M$ (sempre in numero finito), e se in tutti questi punti esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata.

Definizione 4: Una funzione $f(x)$, definita in R, si dice regolare a tratti (continua a tratti) in R, se è regolare a tratti (continua a tratti) in ogni intervallo $[a, b)$.

Una funzione continua a tratti in R è integrabile in ogni intervallo; se poi è periodica di periodo T, si ha

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

infatti $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$ e,

posto $x = t + T$, l'integrale di mezzo a secondo membro diventa $\displaystyle\int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$.

Le funzioni periodiche più semplici sono

$$a\cos\frac{2\pi}{T}(x-\xi), \qquad a\sin\frac{2\pi}{T}(x-\xi).$$

Il numero positivo a si chiama ampiezza dell'oscillazione, e rappresenta il massimo della funzione; il numero $\frac{2\pi}{T}(x-\xi)$ è la fase,mentre $\frac{2\pi\xi}{T}$ è lo spostamento di fase. Infine il numero $\omega=\frac{2\pi}{T}$ si chiama pulsazione dell'oscillazione, e $\nu=\frac{1}{T}$ è la frequenza. Tale terminologia deriva da branche della fisica come l'acustica e la radiotecnica.

A volte si useranno anche le funzioni periodiche complesse $Ae^{i\omega t}$ dove A è un numero complesso ($A=ae^{-i\omega\xi}$) detto ampiezza complessa della vibrazione, in tal caso le funzioni $a\cos\frac{2\pi}{T}(x-\xi)$ e $a\sin\frac{2\pi}{T}(x-\xi)$ sono la parte reale e immaginaria della funzione $Ae^{i\omega t}$.

Funzioni periodiche più generali sono le combinazioni lineari del tipo

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\right)$$

di periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Poiché la funzione $S_n(x)$ contiene $2n+1$ costanti arbitrarie, si può pensare di approssimare una qualsiasi funzione periodica con combinazioni lineari di questo tipo.

Esempio 2. Sia $f^*(x)$ la funzione prolungata dell'esempio 1. Risultano buone sue approssimazioni le seguenti combinazioni

$$2\left\{\sin x-\frac{\sin 2x}{2}\right\},\quad 2\left\{\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}\right\},\quad 2\left\{\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}\right\}.$$

Sviluppi in serie di Fourier

Studiamo ora la possibilità di approssimare una funzione periodica $f(x)$, che supporremo per semplicità di periodo 2π, per mezzo di somme trigonometriche

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$$

o, meglio, di sviluppare la funzione $f(x)$ in serie di Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right).$$

I coefficienti a_k e b_k dipenderanno dalla funzione in esame. Supponiamo che la serie a secondo membro converga uniformemente alla funzione $f(x)$; moltiplichiamo ambo i membri dell'ultima relazione per $\cos(mx)$ e integriamo tra $-\pi$ e π. Tenendo conto del teorema del passaggio al limite sotto il segno di serie e delle seguenti relazioni

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(mx)\,dx=\begin{cases}0 & \text{se } m\neq k\\ \pi & \text{se } m=k\neq 0\end{cases}\quad;\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(mx)\,dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ \pi & \text{se } m = k \neq 0 \end{cases},$$

si ottiene immediatamente

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Analogamente moltiplicando ambo i membri della relazione per $\sin(mx)$ e integrando tra $-\pi$ e π si ottiene

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx, \quad m = 1,2,\ldots$$

I coefficienti a_m e b_m così ottenuti si chiamano coefficienti di Fourier della funzione *f*. Si possono ora dimostrare i seguenti risultati

Teorema 1. Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π regolare a tratti; la serie di Fourier della *f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

converge a $f(x)$ nei punti in cui è continua. Inoltre in un punto x_0 di discontinuità la serie converge alla media dei limiti destro e sinistro:

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Teorema 2. Se la funzione $f(x)$ è continua in **R** e regolare a tratti, la serie di Fourier della *f* converge totalmente, e quindi uniformemente, alla funzione $f(x)$.

Teorema 3. Se la funzione $f(x)$ è regolare a tratti, la serie di Fourier della *f* converge uniformemente a $f(x)$ in ogni intervallo chiuso $[a,b]$ in cui la funzione è continua.

Se la funzione $f(x)$ è una funzione pari allora le funzioni $f(x)\sin(kx)$ sono dispari, $\forall k \in Z$, quindi

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = 0, \quad m = 1,2,\ldots$$

cosicché una funzione pari si sviluppa in serie di soli coseni; analogamente una funzione dispari si sviluppa in serie di soli seni.

Esempio 3. Sia $f^*(x)$ la funzione prolungata dell'esempio 1 è dispari. Si ha

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(mx)\,dx$$

da cui, integrando per parti,

$$b_m = -\frac{2}{m}\cos mx = (-1)^{m+1}\frac{2}{k}.$$

Si ha dunque, per $x \neq (2k+1)\pi$,

$$x = f^*(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx),$$

mentre per $x = (2k+1)\pi$, la serie a secondo membro converge a 0.

ESERCIZI

1. Determinare la serie di Fourier della funzione f di periodo 2π, così definita

$$f(x) = x \text{ per } 0 \leq x < 2\pi$$

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Dimostrare, quindi, che $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

2. Determinare la serie di Fourier della funzione $f(x) = \begin{cases} 2x & |x| < \pi \\ 0 & |x| \geq \pi \end{cases}$, quindi calcolare la somma della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\operatorname{sen} k}{k}$.