1. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore (specificando se sono anche massimo e minimo assoluti) dell'insieme $A=\left\{x\in \mathrm{R} : x=\frac{3-4n}{2^n}, \forall n\in \mathrm{N}_0\right\}$.

Sia $f(x)=\frac{3-4x}{2^x}$, con $x\in[0,+\infty)$, la funzione associata alla successione che descrive gli elementi di *A*. Si ha $f(0)=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{2^x\log 2}=0$ e $f'(x)=\frac{-4-3\log 2+4x\log 2}{2^x}$. Il punto $x=\frac{4+3\log 2}{4\log 2}\approx 2.19$ è un punto di minimo assoluto. Poiché $f(1)=-\frac{1}{2}$ e $f(2)=-\frac{5}{4}$ si ottiene che $\max A=3$, mentre $\min A=-\frac{5}{4}$.

----

2. Studiare, al variare del parametro reale α, il seguente limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(2-\sqrt[3]{\alpha+1}\right)^n$.

Posto $\lambda=2-\sqrt[3]{\alpha+1}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda^n}{n}=\begin{cases}+\infty & se\,\lambda>1\\ 0 & se -1\le\lambda\le 1\\ irreg. & se\,\lambda<-1\end{cases}.$$

Dalla disequazione $2-\sqrt[3]{\alpha+1}>1$ si ottiene $\alpha<0$. Dalla disequazione $2-\sqrt[3]{\alpha+1}<-1$ si ottiene $\alpha>26$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2-\sqrt[3]{\alpha+1}\right)^n}{n}=\begin{cases}+\infty & se\,\alpha<0\\ 0 & se\,0\le\alpha\le 26\\ irreg. & se\,\alpha>26\end{cases}$$

----

3. Verificare (applicando *solo* la definizione) che $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}=1$.

Occorre verificare che $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta_\varepsilon>0 / \forall x>\delta_\varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon<\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}<1+\varepsilon$. Studiamo il sistema

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}<1+\varepsilon\\ \frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x}>1-\varepsilon\end{cases},$$

considerando $x > 0$. La prima disequazione è verificata per $\forall x > \dfrac{-3+\sqrt{9+4(2\varepsilon+\varepsilon^2)}}{2(2\varepsilon+\varepsilon^2)}$, mentre la seconda disequazione è verificata per $\forall x > \dfrac{3+\sqrt{9-4(2\varepsilon-\varepsilon^2)}}{2(2\varepsilon-\varepsilon^2)}$. Allora il limite è verificato scegliendo $\delta_\varepsilon = \dfrac{3+\sqrt{9-4(2\varepsilon-\varepsilon^2)}}{2(2\varepsilon-\varepsilon^2)}$.

---

4. Senza calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}$, giustificare la derivabilità della stessa nell'insieme $\mathbb{R}-\{0,2\}$. Stabilire, utilizzando $f'(x)$, se i punti 0 e 2 sono punti di derivabilità, angolosi, cuspidali o di flesso a tangente verticale.

La funzione si compone mediante le due funzioni elementari $g(t)=\sqrt[3]{t}$ e $h(x)=\left(x^2-2x\right)^2$, cioè $f(x)=(g\circ h)(x)$. La funzione $h(x)$ è derivabile in tutto l'asse reale, mentre la funzione $g(t)$ non è derivabile in $t = 0$. Poiché $t = 0$ corrisponde a $\left(x^2-2x\right)^2=0$, cioè $x = 0$ e $x = 2$, per il teorema sulla derivabilità delle funzioni composte si ha che la funzione $f(x)$ è sicuramente derivabile in $\mathbb{R}-\{0,2\}$. In tale insieme si ha $f'(x)=\dfrac{2(2x-2)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)}}$, inoltre risulta

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty .$$

Quindi $x = 0$ e $x = 2$ sono punti cuspidali.