**SOLUZIONI DI UNA TRACCIA DELLA PROVA D'ESAME DI CALCOLO 1**
**O ESONERO DI ANALISI MATEMATICA DEL** 28/11/08
**Collegio Didattico di Ingegneria Informatica**
(Oss. *Le altre tracce si risolvono con analoghi procedimenti*)

**1.** Verificare (applicando *solo* la definizione) che $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=3$.

*Occorre dimostrare che* $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_\varepsilon>0 / \forall n>\delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n-1}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. *L'ultima disequazione, dopo semplici calcoli, si riconduce alla seguente* $\left|\frac{-4}{n+1}\right|<\varepsilon$ *ovvero, siccome n è naturale, a* $\frac{4}{n+1}<\varepsilon$ *che è soddisfatta* $\forall n>\frac{4}{\varepsilon}-1$. *Il limite è, quindi, dimostrato scegliendo* $\delta_\varepsilon=\frac{4}{\varepsilon}-1$.

**2**. Siano $f(x)=\left(x^2+1\right)\log\left(x^2+1\right)-2x^2$ e $g(x)=\frac{x}{\log\left(x^2+1\right)}$. Studiare il segno di *f* nell'intervallo $\left[-\sqrt{e-1},\sqrt{e-1}\right]$ e dimostrare che $g(x)>0 \quad \forall x\in\left(0,1\right]$.

*Si ha* $f'(x)=2x\left[\log\left(x^2+1\right)-1\right]$, *che è positiva in* $\left(-\sqrt{e-1},0\right)$ *e negativa in* $\left(0,\sqrt{e-1}\right)$. *Quindi l'origine è punto di massimo assoluto per f in* $\left[-\sqrt{e-1},\sqrt{e-1}\right]$. *Essendo* $f(0)=0$, *si ha* $f(x)<0$ *in* $\left[-\sqrt{e-1},\sqrt{e-1}\right]$ *tranne in* 0 *in cui si annulla.*

*Si ha* $g'(x)=\frac{f(x)}{\left(x^2+1\right)\left[\log\left(x^2+1\right)\right]^2}$. *Per il risultato precedente, ed essendo* $1<\sqrt{e-1}$, *si ha che* $g'(x)<0$ *in* $\forall x\in\left(0,1\right]$ *e quindi g è ivi decrescente. Poiché* $g(1)=\frac{1}{\log 2}>0$, *segue che* $g(x)>0 \quad \forall x\in\left(0,1\right]$.

(Oss: *In questa traccia in realtà, senza fare il ragionamento sopra esposto, si vede subito che* $g(x)>0 \ \forall x\in\left(0,1\right]$ *essendo il numeratore x e il denominatore* $\log\left(x^2+1\right)$ *entrambe funzioni positive in* $\left(0,1\right]$ )

**3**. Sia $\left\{a_n\right\}$ una successione decrescente e $\lim_{n\to+\infty}a_n=l$. Dimostrare che $l=\inf a_n$. Stabilire se il risultato sussiste anche senza l'ipotesi di monotonia per la successione.

*Per ipotesi si ha che* $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_\varepsilon>0 / \forall n>\delta_\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$.

*Quindi l soddisfa la seconda condizione affinché risulti estremo inferiore della successione, cioè*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\, \overline{n}\in\mathbf{N} \text{ (basta scegliere } \overline{n}>\delta_\varepsilon) \,/\, a_{\overline{n}}<l+\varepsilon .$$

*Resta da verificare che l è un minorante per la successione. Innanzi tutto dalla convergenza si ha che* $\forall n>\delta_\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon<a_n$ *ovvero, per l'arbitrarietà di* $\varepsilon$, $l\le a_n$.

*Poiché la successione è decrescente, si ha* $a_m\ge a_n$ *per tutti gli indici* $m\le\delta_\varepsilon$ *e* $n>\delta_\varepsilon$**.** *Quindi, la disequazione* $l\le a_n$ *vale non solo per gli indici* $n>\delta_\varepsilon$, *ma per ogni naturale n.*

*Senza l'ipotesi di monotonia per la successione quest'ultima proprietà non è soddisfatta e quindi non è, in generale, verificata la condizione affinché l sia un minorante per la successione.*

**4.** Applicare il teorema sulla derivabilità delle funzioni composte alla funzione $F(x)=\left|(\sin x)^3\right|$.

Negli eventuali punti in cui non sono verificate le condizioni del suddetto teorema studiare la derivabilità di $F(x)$ utilizzando direttamente la definizione.

*Si ha* $F(x)=(g\circ f)(x)$ *dove* $y=f(x)=(\sin x)^3$ *e* $z=g(y)=|y|$. *La funzione f è derivabile* $\forall x\in\mathbb{R}$, *mentre la funzione g è derivabile* $\forall y\in\mathbb{R}-\{0\}$. *Poiché risulta* $y=0$ *quando* $x=k\pi,\quad \forall k\in\mathbb{Z}$, *dal teorema sulla derivabilità delle funzioni composte segue la derivabilità di F in* $\mathbb{R}-\{k\pi,\forall k\in\mathbb{Z}\}$. *Nei punti* $x=k\pi,\quad \forall k\in\mathbb{Z}$, *si ha*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left|\sin^3(k\pi+h)\right|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\sin^3 h\right|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\sin h\right|}{h}\sin^2 h=0\,.$$

*La funzione F è, allora, derivabile anche nei punti* $x=k\pi,\forall k\in\mathbb{Z}$.