**SOLUZIONI DI UNA TRACCIA DELLA PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA (1.07.09)**

**1.** Determinare il dominio e il segno della funzione $f(x)=\log_{3/2}\left|\dfrac{x+1}{x-4}\right|$.

*La funzione è definita in* $D=\mathbb{R}-\{-1,4\}$. *Si ha* $f(x)<0$ *se* $\left|\dfrac{x+1}{x-4}\right|<1$. *La disequazione equivale al sistema* $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-4}<1\\ \dfrac{x+1}{x-4}>-1\end{cases}$ *ovvero* $\begin{cases}\dfrac{5}{x-4}<0\\ \dfrac{2x-3}{x-4}>0\end{cases}$ *le cui soluzioni sono tutte le* $x<\dfrac{3}{2}$. *Quindi si ha*

$$f(x)<0 \quad \forall x\in(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{3}{2}\right),\ f(x)=0 \quad se\ x=\frac{3}{2},\ f(x)>0 \quad \forall x\in\left(-\frac{3}{2},4\right)\cup(4,+\infty).$$

**2**. Determinare il limite della successione $\sqrt[n]{n^3-2\sin n}$ .

*Posto* $\sqrt[n]{n^3-2\sin n}=\left(n^3-2\sin n\right)^{\frac{1}{n}}$ *si ha* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3-2\sin n}=\infty^0$. *Poiché* $\left(n^3-2\sin n\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{\log\left(n^3-2\sin n\right)}{n}}$, *si puo' studiare* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\left(n^3-2\sin n\right)}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2\cos x}{x^3-2\sin x}=0$ *(si è utilizzato il teorema di De l'Hospital alla funzione associata). In conclusione si ottiene che la successione converge a* 1.

**3**. Risolvere nel campo complesso l'equazione $\left(\overline{z}+i\right)^4=5\dfrac{1-i}{1+2i}+3i$ .

*Svolgendo i calcoli a secondo membro l'equazione diventa* $\left(\overline{z}+i\right)^4=-1$ *e quindi* $\overline{z}+i=\sqrt[4]{-1}$. *Poiché*

$$\sqrt[4]{-1}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \qquad k=0,1,2,3,$$

*si hanno le seguenti quattro equazioni:*

$$\overline{z}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\qquad \overline{z}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\qquad \overline{z}+i=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\qquad \overline{z}+i=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

*da cui*

$$\overline{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),\ \overline{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ \overline{z}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ \overline{z}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right).$$

*Si trovano allora le quattro soluzioni*

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right).$$

**4.** Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases}y'=\dfrac{(4\sin x-2)\cos x}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}\\ y(0)=4\end{cases}$.

*Poiché* $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}=\dfrac{\cos x(1-2\sin x)}{2\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$ *si ha che l'integrale generale dell'equazione differenziale è* $y=-4\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}+c$. *Dalla condizione iniziale si trova* $4=-4\sqrt{2}+c$. *Allora la soluzione del problema di Cauchy è* $y=4\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}\right)$.