SOLUZIONI DI UNA TRACCIA DELLA PROVA D'ESAME DI CALCOLO 1 (1.07.09)

1. Determinare il dominio e il segno della funzione $f(x)=\log_{3/2}\left|\frac{x+1}{x-4}\right|$.

La funzione è definita in $D=\mathbb{R}-\{-1,4\}$. *Si ha* $f(x)<0$ *se* $\left|\frac{x+1}{x-4}\right|<1$. *La disequazione equivale al sistema* $\begin{cases}\frac{x+1}{x-4}<1\\ \frac{x+1}{x-4}>-1\end{cases}$ *ovvero* $\begin{cases}\frac{5}{x-4}<0\\ \frac{2x-3}{x-4}>0\end{cases}$ *le cui soluzioni sono tutte le* $x<\frac{3}{2}$. *Quindi si ha*

$f(x)<0\quad \forall x\in(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{3}{2}\right)$, $f(x)=0$ *se* $x=\frac{3}{2}$, $f(x)>0\quad\forall x\in\left(-\frac{3}{2},4\right)\cup(4,+\infty)$.

2. Determinare il limite della successione $\sqrt[n]{n^3-2\sin n}$.

Posto $\sqrt[n]{n^3-2\sin n}=\left(n^3-2\sin n\right)^{\frac{1}{n}}$ *si ha* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3-2\sin n}=\infty^0$. *Poiché* $\left(n^3-2\sin n\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{\log\left(n^3-2\sin n\right)}{n}}$, *si puo' studiare* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log\left(n^3-2\sin n\right)}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2\cos x}{x^3-2\sin x}=0$ *(si è applicato il teorema di De l'Hospital alla funzione associata). In conclusione si ottiene che la successione converge a* 1.

3. Determinare, se possibile, le espressioni delle funzioni inverse di $\sin x$ in $[2\pi,3\pi]$ e $\left[\frac{5}{2}\pi,\frac{7}{2}\pi\right]$

Dal grafico della funzione elementare $\sin x$ *si deduce direttamente che in* $[2\pi,3\pi]$ *essa non risulta iniettiva e quindi nemmeno invertibile, mentre in* $\left[\frac{5}{2}\pi,\frac{7}{2}\pi\right]$ *risulta iniettiva e quindi invertibile. Il grafico dell'inversa di* $\sin x$, *con* $x\in\left[\frac{5}{2}\pi,\frac{7}{2}\pi\right]$, *coincide con quello ottenuto mediante una rotazione di* 180° *attorno all'asse delle ordinate e successivamente con una traslazione di* 3π *verso l'alto della funzione elementare* $\arcsin t$. *Quindi l'espressione dell'inversa di* $\sin x$, *nel caso* $x\in\left[\frac{5}{2}\pi,\frac{7}{2}\pi\right]$, *è* $\arcsin(-t)+3\pi$.

4. Studiare, mediante il teorema sulla derivabilità delle funzioni composte, la derivabilità della funzione $f(x)=\arcsin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Determinare inoltre eventuali punti angolosi o cuspidali.

Si ha $f(x)=g[h(x)]$ *dove* $y=h(x)=\frac{1}{x^2+1}$ *e* $z=g(y)=\arcsin(y)$. *Poiché* $h(x)$ *è derivabile* $\forall x\in\mathbb{R}$ *e* $g(y)$ *è derivabile* $\forall y\in[-1,1]-\{\pm1\}$, *risultando* $y=1$ *quando* $x=0$, *dal teorema sulla derivabilità delle funzioni composte risulta che* $f(x)$ *è derivabile* $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$. *Inoltre,* $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$, *risulta* $f'(x)=\frac{-2}{(x^2+1)\sqrt{2+x^2}}\frac{x}{|x|}$ *da cui si ha* $\lim\limits_{x\to0^{\pm}}f'(x)=\mp\sqrt{2}$. *L'origine è , quindi, punto angoloso per la funzione.*