SOLUZIONI DI UNA TRACCIA DELLA PROVA DI CALCOLO 2 (1.07.09)

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione $\left(\bar{z}+i\right)^4 = 5\dfrac{1-i}{1+2i}+3i$.

Svolgendo i calcoli a secondo membro l'equazione diventa $\left(\bar{z}+i\right)^4 = -1$ *e quindi* $\bar{z}+i = \sqrt[4]{-1}$. *Poiché*

$$\sqrt[4]{-1} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \qquad k=0,1,2,3,$$

si hanno le seguenti quattro equazioni:

$$\bar{z}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \qquad \bar{z}+i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \qquad \bar{z}+i=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \qquad \bar{z}+i=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

da cui

$$\bar{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),\ \ \bar{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ \ \bar{z}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ \ \bar{z}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right).$$

Si trovano allora le quattro soluzioni

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right),\ \ z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ \ z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right),\ \ z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right).$$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{\left(4\sin x-2\right)\cos x}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}} \\ y(0)=4 \end{cases}$.

Poiché $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x} = \dfrac{\cos x\left(1-2\sin x\right)}{2\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$ *si ha che l'integrale generale dell'equazione differenziale è* $y=-4\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}+c$. *Dalla condizione iniziale si trova* $4=-4\sqrt{2}+c$. *Allora la soluzione del problema di Cauchy è* $y=4\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}\right)$.

3. Dimostrare che, per ogni x reale, vale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+2t+3} < \int_{-1}^x \frac{dt}{t^2+2t+3}$.

Posto $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+2t+3}$ *e* $g(x)=\displaystyle\int_{-1}^x \frac{dt}{t^2+2t+3}$, *si ha* $f'(x)=g'(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+3}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.
Quindi le funzioni differiscono per una constante e sono crescenti. Poiché la g interseca l'asse x in -1 *e quindi prima di f, che lo interseca in* 0, *si ottiene* $f(x)<g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

4. Sia $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie a termini di segno positivo tale che $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\frac{1}{2}$. Dimostrare, senza utilizzare il criterio della radice, che la serie converge. (*Sugg.: utilizzare la definizione di limite di una successione e il criterio del confronto per le serie*).

Dalla definizione di limite si ha $\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon>0\ /\ \forall k>\nu_\varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{2}-\varepsilon<\sqrt[k]{a_k}<\dfrac{1}{2}+\varepsilon$.
Dalla seconda delle ultime due disuguaglianze si ottiene, elevando alla k-esima potenza, definitivamente $a_k<\left(\dfrac{1}{2}+\varepsilon\right)^k$. *Scegliendo* ε *opportunamente piccolo segue, per il criterio del confronto, la convergenza della serie essendo maggiorata da una serie geometrica convergente.*