

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \log(\arctan(\sin(3x+1)))$. Dimostrare, inoltre, che f è invertibile nell'intervallo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{\pi-2}{6}\right)$.

La condizione da imporre è $\arctan(\sin(3x+1)) > 0$ e quindi $\sin(3x+1) > 0$. Quest'ultima è soddisfatta per ogni x reale tale che $2k\pi < 3x+1 < \pi + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Si ottiene allora il dominio

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-1+2k\pi}{3} < x < \frac{\pi-1+2k\pi}{3}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Per l'invertibilità di } f \text{ in } I = \left(-\frac{1}{3}, \frac{\pi-2}{6}\right),$$

studiamo il segno di $f'(x) = \frac{3\cos(3x+1)}{[1+\sin^2(3x+1)]\arctan(\sin(3x+1))}$. Da $-\frac{1}{3} < x < \frac{\pi-2}{6}$ segue

$0 < 3x+1 < \frac{\pi}{2}$. Allora risulta $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ e, di conseguenza, la funzione è strettamente crescente e, quindi, invertibile in I .

2. Studiare il segno della funzione $f(x) = 6\left(\log_{\frac{1}{2}} x^2\right)^2 - 2\log_{\frac{1}{2}} |x| - 4$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Dalle proprietà del logaritmo si ha, $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) = 24\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 4$. Posto

$$t = \log_{\frac{1}{2}} x, \text{ si ha } f(t) = 24t^2 - 2t - 4, \text{ da cui: } f(t) > 0 \quad \forall t \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{97}}{24}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{97}}{24}, +\infty\right),$$

$f(t) < 0 \quad \forall t \in \left(\frac{1-\sqrt{97}}{24}, \frac{1+\sqrt{97}}{24}\right)$ e $f\left(\frac{1\pm\sqrt{97}}{24}\right) = 0$. Tornando alla variabile x si ottiene:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\sqrt{97}}{24}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+\sqrt{97}}{24}}\right), \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in \left(-\infty, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\sqrt{97}}{24}}\right) \cup \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+\sqrt{97}}{24}}, +\infty\right) \quad e$$

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1\pm\sqrt{97}}{24}}\right) = 0.$$

3. Date le funzioni $f(x) = \cos(x-1)$ e $g(x) = \arccos x + 1$, calcolare, se possibile, $f \circ g$ e $g \circ f$ precisandone il dominio. Stabilire inoltre se tali composte siano pari, dispari o periodiche. Si ha $(f \circ g)(x) = \cos(\arccos x + 1 - 1) = x$ e quindi $(f \circ g)(x) = x$ definita in $[-1, 1]$ e $(g \circ f)(x) = \arccos(\cos(x+1)) - 1$ definita in $\mathbb{R}$. $f \circ g$ è dispari, mentre $g \circ f$ è periodica.

4. Sia $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Dimostrare, usando la definizione di limite, che $\lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x) = -\infty$.

Per ipotesi si ha che $\forall M > 0 \exists \delta_M > 0 / \forall x < -\delta_M \Rightarrow f(x) > M$. Sia $\bar{\delta}_M = \max\{\delta_M, 1\}$, allora $\forall x < -\bar{\delta}_M \Rightarrow x f(x) < x M < -M$. In conclusione si può stabilire quindi che $\forall M > 0 \exists \bar{\delta}_M > 0 / \forall x < -\bar{\delta}_M \Rightarrow x f(x) < -M$ ovvero che $\lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x) = -\infty$.