1. Verificare l'invertibilità, nel rispettivo dominio, di $f(x)=\begin{cases} e^{-\sqrt{x-1}} & \text{se } x \geq 1 \\ -\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x & \text{se } x<1 \end{cases}$. Detta g l'inversa di *f,* determinarne il dominio e codominio. Quindi calcolare $g'(1)$.

$D_f=\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\pi$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\dfrac{\pi}{4}$, $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. f è continua e derivabile in $D_f-\{1\}$. x = 1 è un punto di discontinuità di prima specie per *f.*

$\forall x\in D_f-\{1\}$ si ha $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{e^{-\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}} & \text{se } x>1 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x<1 \end{cases}$. Segue che f è strettamente crescente in $(-\infty,1)$ e strettamente decrescente in $[1,+\infty)$ (*f* è continua a destra in x = 1). Affinché risulti iniettiva in D_f deve necessariamente verificarsi (come si può osservare graficamente) una delle due seguenti condizioni: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\pi \geq f(1)=1$ oppure $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\dfrac{\pi}{4} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. In questo caso si verifica la seconda condizione. Essendo f iniettiva in D_f sarà ivi anche invertibile.

Per il teorema dei valori intermedi delle funzioni continue, applicato prima nell'intervallo $(-\infty,1)$ e poi nell'intervallo $[1,+\infty)$, e per il fatto che f è strettamente crescente in $(-\infty,1)$ e strettamente decrescente in $[1,+\infty)$ si ha che $C_f=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\right)\cup\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(0)\right]=\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{4}\right)\cup(0,1]$. Detta g l'inversa di f si ha $D_g=\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{4}\right)\cup(0,1]$ e $C_g=\mathbb{R}$.

Poiché la f verifica in $(1,+\infty)$ tutte le ipotesi del teorema sulla derivabilità delle funzioni inverse si ha che la g è derivabile in $(0,1)$ e, $\forall y\in(0,1)$ risulta

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=-\frac{2\sqrt{x-1}}{e^{-\sqrt{x-1}}},$$

dove $x=g(y)$. Inoltre, essendo g continua a sinistra in y = 1, risulta

$$\lim_{y\to1^-} g'(y)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{f'(x)}=\lim_{x\to1^+}-\frac{2\sqrt{x-1}}{e^{-\sqrt{x-1}}}=0.$$

Quindi g è derivabile anche in y = 1 e si ha $g'(1)=0$.

2. Studiare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x)=\left|\dfrac{|x+2|+1}{x+3}\right|$.

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$. $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -2 \\ \left|\dfrac{-x-1}{x+3}\right| & \text{se } x < -2 \text{ e } x \neq -3 \end{cases}$. $\qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq -2 \\ \dfrac{-x-1}{x+3} & \text{se } -3 < x < -2 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & \text{se } x < -3 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > -2 \\ \dfrac{-2}{(x+3)^2} & \text{se } -3 < x < -2 \\ \dfrac{2}{(x+3)^2} & \text{se } x < -3 \end{cases}$. $\qquad \lim\limits_{x \to -2^-} f'(x) = -2 \qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = 0$.

Quindi l'insieme di derivabilità di f è $D_f - \{-2\}$.

3. Calcolare il seguente limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+2}$, dimostrando il risultato mediante la definizione di successione convergente.

Si ha $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$. Si dimostra, infatti, che $\forall \varepsilon > 0\ \exists n\ > 0 / \forall n > n\ \Rightarrow 1 - \varepsilon < \dfrac{n}{n+2} < 1 + \varepsilon$.

Si risolve il sistema $\begin{cases} \dfrac{n}{n+2} < 1 + \\ \dfrac{n}{n+2} > 1 - \end{cases}$ e si trova l'insieme delle soluzioni $S = \left(\dfrac{2(1-\varepsilon)}{n}, +\infty \right)$.

Quindi si verifica l'esistenza di un numero reale $n\ > 0 / \left(n\ , +\infty\right) \subseteq S$. Basta scegliere $n\ = \dfrac{2(1-\varepsilon)}{n}$.

4. Sia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l > 0$. Dimostrare, applicando la definizione di funzione convergente, che esiste un numero reale positivo δ tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right) - \{x_0\}$.

Si ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 / \forall x \in D_f$ per cui $x \in \left(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon\right) - \{x_0\} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Poichè la precedente relazione vale $\forall \varepsilon > 0$ posso scegliere, per esempio, $\ = \dfrac{l}{2}$. Con tale scelta esiste allora un numero reale positivo $\delta = \delta_{\frac{l}{2}}$ tale che

$$\forall\ x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right) - \{x_0\} \Rightarrow \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2} \Rightarrow f(x) > 0$$