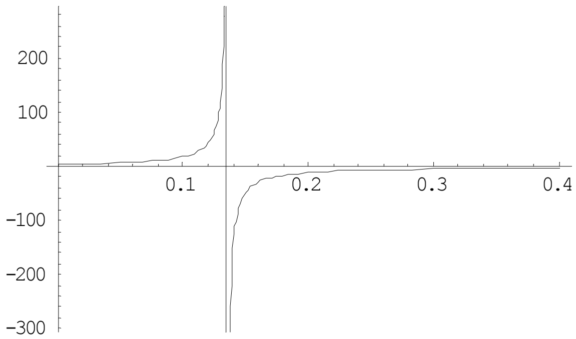
COMPITO A

1. Stabilire se la funzione $f(x)=\dfrac{\log x-3}{\log x+2}$ è strettamente monotona nel rispettivo dominio *D*. Verificare l'invertibilità di *f* in *D*. Determinare il dominio e codominio della funzione inversa $\overleftarrow{f}$. Studiare la derivabilità di $\overleftarrow{f}$ nel rispettivo dominio. Calcolare $\left(\overleftarrow{f}\right)'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$. È possibile determinare l'espressione esplicita di $\overleftarrow{f}$?

$D=\left(0,e^{-2}\right)\cup\left(e^{-2},+\infty\right)$. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim_{x\to\left(e^{-2}\right)^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\left(e^{-2}\right)^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$\forall x\in D \quad f'(x)=\dfrac{5}{x\left(\log x+2\right)^2}$. Segue allora che il grafico della funzione è



La funzione non è strettamente monotona in *D*, ma è ivi iniettiva e quindi invertibile. Dominio e codominio di $\overleftarrow{f}$ sono rispettivamente gli insiemi $\mathbb{R}-\{1\}$ e $\left(0,e^{-2}\right)\cup\left(e^{-2},+\infty\right)$. Poiché *f* è derivabile in *D* e si ha ivi $f'(x)\neq 0$, dal teorema sulla derivabilità della funzione inversa si ha che $\overleftarrow{f}$ è derivabile in $\mathbb{R}-\{1\}$ e risulta $\left(\overleftarrow{f}\right)'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{x_0\left(\log x_0+2\right)^2}{5}$ dove $x_0=\left(\overleftarrow{f}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)$. Essendo $f\left(x_0\right)=-\dfrac{3}{2}$, cioè $\dfrac{\log x_0-3}{\log x_0+2}=-\dfrac{3}{2}$, si ha $x_0=1$. Quindi $\left(\overleftarrow{f}\right)'\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{4}{5}$. Da $y=\dfrac{\log x-3}{\log x+2}$ si ha $\log x=\dfrac{2y+3}{1-y}$ da cui segue $\overleftarrow{f}(y)=e^{\frac{2y+3}{1-y}}$.

2. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^{-x^7+7x+1}=\alpha$, al variare del parametro reale α.

Posto $f(x)=e^{-x^7+7x+1}-\alpha$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$**,** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\alpha$.

Inoltre $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=7\left(-x^6+1\right)e^{-x^7+7x+1}$, da cui segue che $f(-1)=e^{-5}-\alpha$ è un minimo relativo e $f(1)=e^7-\alpha$ è un massimo relativo. Se $-\alpha\geq 0$, ovvero $\alpha\leq 0$, l'equazione non ammette soluzioni reali. Se $-\alpha<0$ e $f(-1)=e^{-5}-\alpha>0$, ovvero $0<\alpha<e^{-5}$ l'equazione ammette una soluzione reale. Se $f(-1)=e^{-5}-\alpha=0$, ovvero $\alpha=e^{-5}$ l'equazione ammette due

soluzioni reali. Se $f(-1)=e^{-5}-\alpha<0$ e $f(1)=e^{7}-\alpha>0$, ovvero $e^{-5}<\alpha<e^{7}$ l'equazione ammette tre soluzioni reali. Se $f(1)=e^{7}-\alpha=0$, ovvero $\alpha=e^{7}$ l'equazione ammette due soluzioni reali. Se $f(1)=e^{7}-\alpha<0$, ovvero $\alpha>e^{7}$ l'equazione ammette una soluzione reale.

3. Stabilire, giustificando le risposte, il comportamento delle seguenti funzioni per $x\to+\infty$**:** $f(x)=\sqrt{x}+\cos x$, $h(x)=\left(x+x^{3}\sin x\right)$, $g(x)=x^{3}\left(2+\sin x\right)$

Poiché $\sqrt{x}+\cos x\geq\sqrt{x}-1$ e $\sqrt{x}-1\to+\infty$ per $x\to+\infty$, per il teorema del confronto anche $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$**.**

Il grafico della funzione h interseca peridiocamente per $x\to+\infty$ quello dei polinomi $x-x^{3}$ e $x+x^{3}$. Poiché quest'ultimi divergono rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$ per $x\to+\infty$, la funzione h è irregolare per $x\to+\infty$**.**

Poiché $x^{3}\left(2+\sin x\right)\geq x^{3}$ e $x^{3}\to+\infty$ per $x\to+\infty$, per il teorema del confronto anche $g(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$**.**

4. Sia f una funzione derivabile nell'insieme A simmetrico rispetto all'origine. Dimostrare che se f è pari in A allora f' è ivi dispari.

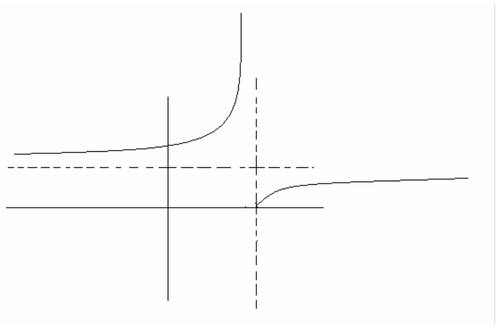
Per Hp. vale $f(x)=f(-x),\quad\forall x\in A$. Dal teorema sulla derivabilità delle funzioni composte segue $f'(x)=-f'(-x),\quad\forall x\in A$.

COMPITO B

1. Stabilire se la funzione $f(x)=e^{\frac{2x+3}{1-x}}$ è strettamente monotona nel rispettivo dominio *D*. Verificare l'invertibilità di *f* in *D*. Determinare il dominio e codominio della funzione inversa $\overleftarrow{f}$. Studiare la derivabilità di $\overleftarrow{f}$ nel rispettivo dominio. Calcolare $\left(\overleftarrow{f}\right)'(1)$. È possibile determinare l'espressione esplicita di $\overleftarrow{f}$?

$D=\mathbb{R}-\{1\}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-2}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{-2}$.

$\forall x\in D \quad f'(x)=\dfrac{5e^{\frac{2x+3}{1-x}}}{(1-x)^2}$. Segue allora che il grafico della funzione è



La funzione non è strettamente monotona in *D*, ma è ivi iniettiva e quindi invertibile. Dominio e codominio di $\overleftarrow{f}$ sono rispettivamente gli insiemi $\left(0,e^{-2}\right)\cup\left(e^{-2},+\infty\right)$ e $\mathbb{R}-\{1\}$. Poiché *f* è derivabile in *D* e si ha ivi $f'(x)\neq 0$, dal teorema sulla derivabilità della funzione inversa si ha che $\overleftarrow{f}$ è derivabile in $\mathbb{R}-\{1\}$ e risulta $\left(\overleftarrow{f}\right)'(1)=\dfrac{(1-x_0)^2}{5}e^{-\frac{2x_0+3}{1-x_0}}$ dove $x_0=\left(\overleftarrow{f}\right)(1)$. Essendo $f(x_0)=1$, cioè $e^{\frac{2x_0+3}{1-x_0}}=1$, si ha $x_0=-\dfrac{3}{2}$. Quindi $\left(\overleftarrow{f}\right)'(1)=\dfrac{5}{4}$. Da $y=e^{\frac{2x+3}{1-x}}$ si ha $\log y=\dfrac{2x+3}{1-x}$ da cui segue $\overleftarrow{f}(y)=\dfrac{\log y-3}{\log y+2}$.

2. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^{x^9-9x+1}=\alpha$, al variare del parametro reale α.

Posto $f(x)=e^{x^9-9x+1}-\alpha$, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\alpha$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Inoltre $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=9\left(x^8-1\right)e^{x^9-9x+1}$, da cui segue che $f(-1)=e^9-\alpha$ è un massimo relativo e $f(1)=e^{-7}-\alpha$ è un minimo relativo. Se $-\alpha\geq 0$, ovvero $\alpha\leq 0$, l'equazione non ammette soluzioni reali. Se $-\alpha<0$ e $f(1)=e^{-7}-\alpha>0$, ovvero $0<\alpha<e^{-7}$ l'equazione ammette una soluzione reale. Se $f(1)=e^{-7}-\alpha=0$, ovvero $\alpha=e^{-7}$ l'equazione ammette due soluzioni reali. Se $f(1)=e^{-7}-\alpha<0$ e $f(-1)=e^9-\alpha>0$, ovvero $e^{-7}<\alpha<e^9$ l'equazione

ammette tre soluzioni reali. Se $f(-1)=e^9-\alpha=0$, ovvero $\alpha=e^9$ l'equazione ammette due soluzioni reali. Se $f(-1)=e^9-\alpha<0$, ovvero $\alpha>e^9$ l'equazione ammette una soluzione reale.

3. Stabilire, giustificando le risposte, il comportamento delle seguenti funzioni per $x\to+\infty$**:** $f(x)=\sqrt{x}\cos x$, $h(x)=\left(x+x^3\sin^2 x\right)$, $g(x)=x^3\left(1+\sin x\right)$

Il grafico della funzione f interseca peridiocamente per $x\to+\infty$ quello delle funzioni $-\sqrt{x}$ e $\sqrt{x}$. Poiché quest'ultimi divergono rispettivamente a $-\infty$ e $+\infty$ per $x\to+\infty$, la funzione f è irregolare per $x\to+\infty$**.**
Poiché $h(x)\geq x$ e $x\to+\infty$ per $x\to+\infty$, per il teorema del confronto anche $h(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$**.**
Il grafico della funzione g interseca peridiocamente per $x\to+\infty$ l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $2x$. Poiché quest'ultima diverge a $+\infty$ per $x\to+\infty$, la funzione g è irregolare per $x\to+\infty$**.**

4. Sia f una funzione derivabile nell'insieme A simmetrico rispetto all'origine. Dimostrare che se f è dispari in A allora f' è ivi pari.

Per Hp. vale $f(x)=-f(-x), \quad \forall x\in A$. Dal teorema sulla derivabilità delle funzioni composte segue $f'(x)=f'(-x), \quad \forall x\in A$.