

SOLUZIONI

1. Sia $f(x) = \begin{cases} -(e^4 + 1)x + \frac{1}{2}e^4 & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ (\lambda x^2 + x)e^{\frac{2}{x}} - x & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}.$

Trovare il valore di λ per cui risulta continua e, per tale valore, disegnarne il grafico.

Si ha $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2}\right)e - \frac{1}{2}$. Quindi la continuità della funzione si ha per

$\lambda = -2$. Poiché per $x \leq \frac{1}{2}$ la funzione rappresenta una retta, studiamo il grafico della funzione

$f(x) = (-2x^2 + x)e^{\frac{2}{x}} - x$, con $x > \frac{1}{2}$. Poiché il polinomio $-2x^2 + x$ risulta negativo per $x > \frac{1}{2}$,

la funzione è sempre negativa per $x > \frac{1}{2}$. Inoltre si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Ancora si ha

$$f'(x) = \left(\frac{-4x^2 + 5x - 2}{x} \right) e^{\frac{2}{x}} - 1.$$

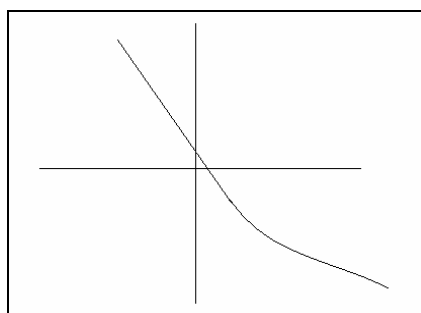
Poiché $f'(x) < 0$ per ogni $x > \frac{1}{2}$, la funzione è strettamente decrescente per $x > \frac{1}{2}$. Essendo

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f'(x) = -(e^4 + 1)$, la funzione risulta derivabile in $\frac{1}{2}$. Infine, per $x > \frac{1}{2}$, si ha

$$f''(x) = -\frac{4e^{\frac{2}{x}}}{x^3} (x^2 - x + 1)(x - 1).$$

Poiché $f''(x) > 0$ per $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (1, +\infty)$, la funzione è concava in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

e convessa in $(1, +\infty)$; 1 è un punto di flesso.



2. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato pari a $2p$, determinare quello di area massima.

Sia x la lunghezza della base del rettangolo. Allora l'altezza misurerà $p - x$. L'area sarà $A(x) = x(p - x)$. Si ha $A'(x) = p - 2x$, da cui risulta che $\frac{p}{2}$ è un punto di massimo assoluto. Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato $\frac{p}{2}$.

3. Verificare (applicando *solo* la definizione) che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} = 1$.

Occorre verificare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon > 0 / \forall n > \nu_\varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} < 1 + \varepsilon$. La prima delle due disequazioni è soddisfatta per ogni numero naturale, mentre la seconda è soddisfatta $\forall n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2 + \varepsilon)}}$. Quindi il limite è verificato ponendo $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2 + \varepsilon)}}$.

4. Siano f e g due funzioni invertibili nell'intervallo I tali che $f(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \forall x \in I$. Dette $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ le rispettive funzioni inverse, dimostrare che $\tilde{f}(y) = \tilde{g}\left(\frac{1}{y}\right)$ nel rispettivo intervallo.

Sia $y = f(x) = \frac{1}{g(x)}$, da cui si ricava $g(x) = \frac{1}{y}$. Quindi si ha $x = \tilde{f}(y) = \tilde{g}\left(\frac{1}{y}\right)$.

1. Determinare, nel piano di Gauss, tutti i numeri complessi z che soddisfano l'equazione $\bar{z} = z^7$.
(Sugg: *moltiplicare entrambi i membri per z , quindi sfruttare la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi*)

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per z si ottiene $|z| = z^8$

Posto $z = |z|(\cos(\text{Arg } z) + i \sin(\text{Arg } z))$ l'equazione diventa

$$|z| = |z|^8 (\cos(8\text{Arg } z) + i \sin(8\text{Arg } z)).$$

Osservato che il numero $z = 0$ è una soluzione dell'equazione, questa equivale, per $z \neq 0$ alla seguente

$$1 = |z|^7 (\cos(8\text{Arg } z) + i \sin(8\text{Arg } z))$$

cioè

$$\begin{cases} |z|^7 \cos(8\text{Arg } z) = 1 \\ |z|^7 \sin(8\text{Arg } z) = 0 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione si ha $\text{Arg } z = \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo tali valori nella prima equazione, segue che k deve essere necessariamente pari, cioè $k = 2h$, $h \in \mathbb{Z}$, e inoltre

$$|z|^7 = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Quindi i numeri complessi che soddisfano l'equazione sono, oltre lo 0, i seguenti sei

$$\cos\left(\frac{h\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{h\pi}{4}\right), \quad h = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

2. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\log(1+x) - \log(1-x)} \right)$.

Dalle formule di MacLaurin $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\log(1+x) - \log(1-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x + o(x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{2x} \left(\frac{1}{1 + o(x)} \right) = 0.$$

3. Risolvere la seguente equazione $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x+1}{k x (k+1)} = 1$.

L'equazione può essere scritta in forma equivalente $\frac{x+1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. La serie a primo membro è telescopica e quindi converge ad 1; per cui l'equazione equivale a $\frac{x+1}{x} = 1$, e quindi non ammette soluzioni.

4. Stabilire, giustificando le risposte, se siano vere o false le seguenti affermazioni:

$$\int_{\pi/2}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt < \int_{\pi}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt \quad \forall x > 0, \quad \int_{-\pi/2}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt < \int_{\pi}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt \quad \forall x > 0.$$

Siano $f(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$, $g(x) = \int_{\pi}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$, $h(x) = \int_{-\pi/2}^x \frac{\sin^2 t}{t} dt$. Le funzioni f e g sono definite in $(0, +\infty)$, mentre la funzione h è definita in $(-\infty, 0)$. Allora la seconda disuguaglianza è falsa non potendo essere messe in relazione tra loro le funzioni g e h . Le funzioni f e g , primitive di una stessa funzione positiva, sono strettamente crescenti e differiscono per una costante. Poiché $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $g(\pi) = 0$ segue che $f(x) > g(x)$ e quindi anche la prima disuguaglianza è falsa.