1° PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA (A)

1. Determinare i valori da assegnare ai parametri reali α e β affinché la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\alpha x)}{8x} & se\ x<0\\ (\beta-1)\sqrt{x}+\cos x & se\ x\ge 0\end{cases}$ risulti continua e derivabile in $x=0$.

La funzione è continua a dx di 0 e si ha $f(0)=1$. Per $\alpha=0$ f non risulta continua a sx di 0. Per $\alpha\ne 0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(\alpha x)}{8x}=\dfrac{\alpha}{8}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\dfrac{\alpha}{8}$, quindi f risulta continua in 0 solo se $\dfrac{\alpha}{8}=1$, cioè $\alpha=8$. Per ogni $x\ne 0$ si ha $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{8x\cos(8x)-\sin(8x)}{8x^2} & \text{se } x<0\\ \dfrac{(\beta-1)}{2\sqrt{x}}-\sin x & \text{se } x>0\end{cases}$. Si ha, applicando la regola di De L'Hospital, $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-4\lim_{x\to 0^-}\sin(8x)=0$, mentre $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\begin{cases}0 & se\ \beta=1\\ \infty & se\ \beta\ne 1\end{cases}$. Quindi f risulta derivabile in 0 solo se $\beta=1$.

2. Determinare il dominio e il segno della funzione $f(x)=\dfrac{\arcsin\left(2-\sqrt{x+7}\right)}{2^{x+8}-1}$.

Le condizioni da imporre sono $x+7\ge 0$, $2^{x+8}-1\ne 0$ e $-1\le 2-\sqrt{x+7}\le 1$. Le prime due disequazioni sono soddisfatte per $x\ge -7$ e $x\ne -8$. L'ultima equivale al sistema $\begin{cases}\sqrt{x+7}\ge 1\\ \sqrt{x+7}\le 3\end{cases}$ soddisfatto per $-6\le x\le 2$. Il dominio di f è allora $D_f=[-6,2]$. Per il segno si ha $2^{x+8}-1>0\ \forall x\in D_f$, mentre $\arcsin\left(2-\sqrt{x+7}\right)\ge 0$ se $2-\sqrt{x+7}\ge 0$, cioè per $x\le -3$. Quindi $f(x)>0$ in $[-6,-3)$, $f(x)<0$ in $(-3,2]$ e $f(-3)=0$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 approssimante la funzione $f(x)=\ln(3x+1)$ in un intorno di $x_0=1$**.** Stabilire una stima della distanza tra $f(x)$ e $P_2(x)$ in $x=\dfrac{4}{3}$.

Si ha $f'(x)=\dfrac{3}{3x+1}$, $f''(x)=\dfrac{-9}{(3x+1)^2}$ e $f'''(x)=\dfrac{54}{(3x+1)^3}$; da cui $f(1)=\ln(4)$**,** $f'(1)=\dfrac{3}{4}$, $f''(1)=-\dfrac{9}{16}$ e $f'''(c)=\dfrac{54}{(3c+1)^3}$; quindi $P_2(x)=\ln(4)+\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{9}{32}(x-1)^2$. Dalla formula di Taylor si ottiene $\left|f\left(\dfrac{4}{3}\right)-P_2\left(\dfrac{4}{3}\right)\right|=\dfrac{|f'''(c)|}{3!}\left(\dfrac{4}{3}-1\right)^3=\dfrac{1}{3(3c+1)^3}$ dove $c\in\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$. Quindi $\dfrac{1}{375}<\left|f\left(\dfrac{4}{3}\right)-P_2\left(\dfrac{4}{3}\right)\right|=\dfrac{1}{3(3c+1)^3}<\dfrac{1}{192}$

4. Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{1}{k^{3\alpha}}\right)k^{\frac{3}{2}-2\alpha}$ converge.

Si applica il criterio del confronto asintotico; allora, per $\beta>0$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right) k^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta} = \lim_{h\to0^+} \frac{\sin\left(h^{3\alpha}\right)}{h^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}} = \lim_{h\to0^+} \frac{h^{3\alpha}+o\left[h^{3\alpha}\right]}{h^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}} = \lim_{h\to0^+} \frac{1+o[1]}{h^{\frac{3}{2}-5\alpha+\beta}} = 1 \quad \text{se} \quad \frac{3}{2}-5\alpha+\beta=0,$$

cioè se $\beta = 5\alpha - \frac{3}{2}$. Quindi la serie converge per $\beta > 1$ ovvero per $5\alpha - \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

1° PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA (B)

1. Determinare i valori da assegnare ai parametri reali α e β affinché la funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha x)}{4x} & se\ x>0 \\ (\beta+1)\sqrt{-x}+\cos x & se\ x\le 0 \end{cases}$ risulti continua e derivabile in $x=0$.

La funzione è continua a sx di 0 e si ha $f(0)=1$. Per $\alpha=0$ f non risulta continua a dx di 0. Per $\alpha\neq 0$ si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\alpha x)}{4x}=\dfrac{\alpha}{4}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\dfrac{\alpha}{4}$, quindi f risulta continua in 0 solo se $\dfrac{\alpha}{4}=1$, cioè $\alpha=4$. Per ogni $x\neq 0$ si ha $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{4x\cos(4x)-\sin(4x)}{4x^2} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{(-\beta-1)}{2\sqrt{-x}}-\sin x & \text{se } x<0 \end{cases}$. Si ha, applicando la regola di De L'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-2\lim\limits_{x\to 0^-}\sin(4x)=0$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\begin{cases} 0 & se\ \beta=-1 \\ \infty & se\ \beta\neq -1 \end{cases}$. Quindi f risulta derivabile in 0 solo se $\beta=-1$.

2. Determinare il dominio e il segno della funzione $f(x)=\dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x+2}-3\right)}{2^{-x-8}-1}$.

Le condizioni da imporre sono $x+2\ge 0$, $2^{-x-8}-1\neq 0$ e $-1\le\sqrt{x+2}-3\le 1$. Le prime due disequazioni sono soddisfatte per $x\ge -2$ e $x\neq -8$. L'ultima equivale al sistema $\begin{cases} \sqrt{x+2}\ge 2 \\ \sqrt{x+2}\le 4 \end{cases}$ soddisfatto per $2\le x\le 14$. Il dominio di f è allora $D_f=[2,14]$. Per il segno si ha $2^{-x-8}-1<0\ \forall x\in D_f$, mentre $\arcsin\left(\sqrt{x+2}-3\right)\ge 0$ se $\sqrt{x+2}-3\ge 0$, cioè per $x\ge 7$. Quindi $f(x)>0$ in $[2,7)$, $f(x)<0$ in $(7,14]$ e $f(7)=0$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 approssimante la funzione $f(x)=\ln(2x+1)$ in un intorno di $x_0=1$. Stabilire una stima della distanza tra $f(x)$ e $P_2(x)$ in $x=\dfrac{3}{2}$.

Si ha $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$, $f''(x)=\dfrac{-4}{(2x+1)^2}$ e $f'''(x)=\dfrac{16}{(2x+1)^3}$; da cui $f(1)=\ln(3)$, $f'(1)=\dfrac{2}{3}$, $f''(1)=-\dfrac{4}{9}$ e $f'''(c)=\dfrac{16}{(2c+1)^3}$; quindi $P_2(x)=\ln(3)+\dfrac{2}{3}(x-1)-\dfrac{2}{9}(x-1)^2$. Dalla formula di Taylor si ottiene $\left|f\left(\dfrac{3}{2}\right)-P_2\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|=\dfrac{|f'''(c)|}{3!}\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^3=\dfrac{1}{3(2c+1)^3}$ dove $c\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$. Quindi $\dfrac{1}{192}<\left|f\left(\dfrac{3}{2}\right)-P_2\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{3(2c+1)^3}<\dfrac{1}{81}$

4. Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{1}{k^{2\alpha}}\right)k^{\alpha-\frac{1}{3}}$ converge.

Si applica il criterio del confronto asintotico; allora, per $\beta>0$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right) k^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta} = \lim_{h\to0^+} \frac{\sin\left(h^{2\alpha}\right)}{h^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}} = \lim_{h\to0^+} \frac{h^{2\alpha}+o\left[h^{2\alpha}\right]}{h^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}} = \lim_{h\to0^+} \frac{1+o[1]}{h^{-\alpha-\frac{1}{3}+\beta}} = 1 \quad \text{se} \quad -\alpha-\frac{1}{3}+\beta=0,$$

cioè se $\beta=\alpha+\frac{1}{3}$. Quindi la serie converge per $\beta>1$ ovvero per $\alpha+\frac{1}{3}>1 \Rightarrow \alpha>\frac{2}{3}$.

PROVA INTEGRATIVA DI ANALISI MATEMATICA (A)

1. Determinare la parte reale ed immaginaria del numero complesso $z=\left(\frac{16}{\sqrt{3}-i}+\frac{4}{i}\right)(i-1)^{16}$.

Si ha $|i-1|=\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(i-1)=\frac{3}{4}\pi$; allora per la formula di De Moivre $(i-1)^{16}=|i-1|^{16}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right\}^{16}=2^8\{\cos(12\pi)+i\sin(12\pi)\}=256$. Quindi $z=256\left(\frac{16}{\sqrt{3}-i}\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}-4i\right)=256\left(\frac{16\sqrt{3}+16i}{4}-4i\right)=256\left(4\sqrt{3}\right)=1024\sqrt{3}$ da cui si ricava $\operatorname{Re} z=1024\sqrt{3}$ e $\operatorname{Im} z=0$.

2. Calcolare l'area della regione sottesa dal grafico di $f(x)=\ln x+1$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

Si ha $A=\int_{1/3}^{2/3}|\ln x+1|dx$. Poiché $\ln x+1\geq 0$ se $x\geq 1/e$, si ottiene $A=-\int_{1/3}^{1/e}(\ln x+1)\,dx+\int_{1/e}^{2/3}(\ln x+1)\,dx=x\ln x\big]_{1/e}^{1/3}+x\ln x\big]_{1/e}^{2/3}=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{2}{e}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 approssimante la funzione $f(x)=\ln(3x+1)$ in un intorno di $x_0=1$. Stabilire una stima della distanza tra $f(x)$ e $P_2(x)$ in $x=\frac{4}{3}$.

Si ha $f'(x)=\frac{3}{3x+1}$, $f''(x)=\frac{-9}{(3x+1)^2}$ e $f'''(x)=\frac{54}{(3x+1)^3}$; da cui $f(1)=\ln(4)$, $f'(1)=\frac{3}{4}$, $f''(1)=-\frac{9}{16}$ e $f'''(c)=\frac{54}{(3c+1)^3}$; quindi $P_2(x)=\ln(4)+\frac{3}{4}(x-1)-\frac{9}{32}(x-1)^2$. Dalla formula di Taylor si ottiene $\left|f\left(\frac{4}{3}\right)-P_2\left(\frac{4}{3}\right)\right|=\frac{|f'''(c)|}{3!}\left(\frac{4}{3}-1\right)^3=\frac{1}{3(3c+1)^3}$ dove $c\in\left(1,\frac{4}{3}\right)$. Quindi $\frac{1}{375}<\left|f\left(\frac{4}{3}\right)-P_2\left(\frac{4}{3}\right)\right|=\frac{1}{3(3c+1)^3}<\frac{1}{192}$

4. Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right)k^{\frac{3}{2}-2\alpha}$ converge.

Si applica il criterio del confronto asintotico; allora, per $\beta>0$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right)k^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sin\left(h^{3\alpha}\right)}{h^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^{3\alpha}+o\left[h^{3\alpha}\right]}{h^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{1+o[1]}{h^{\frac{3}{2}-5\alpha+\beta}}=1 \quad \text{se} \quad \frac{3}{2}-5\alpha+\beta=0,$$

cioè se $\beta=5\alpha-\frac{3}{2}$. Quindi la serie converge per $\beta>1$ ovvero per $5\alpha-\frac{3}{2}>1\Rightarrow\alpha>\frac{1}{2}$.

PROVA INTEGRATIVA DI ANALISI MATEMATICA (B)

1. Determinare la parte reale ed immaginaria del numero complesso $z=\left(\frac{36}{\sqrt{5}-i}+\frac{6}{i}\right)(1-i)^{12}$.

Si ha $|1-i|=\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(1-i)=-\frac{\pi}{4}$; allora per la formula di De Moivre $(1-i)^{12}=|1-i|^{12}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{12}=2^6\left\{\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)\right\}=-64$. Quindi $z=-64\left(\frac{36}{\sqrt{5}-i}\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}+i}-6i\right)=-64\left(\frac{36\sqrt{5}+36i}{6}-6i\right)=-64\left(6\sqrt{5}\right)=-384\sqrt{5}$ da cui si ricava $\operatorname{Re} z=-384\sqrt{5}$ e $\operatorname{Im} z=0$.

2. Calcolare l'area della regione sottesa dal grafico di $f(x)=\ln x-1$ nell'intervallo $[2,3]$.

Si ha $A=\int_2^3|\ln x-1|dx$. Poiché $\ln x-1\geq 0$ se $x\geq e$, si ottiene $A=-\int_2^e(\ln x-1)\,dx+\int_e^3(\ln x-1)\,dx=x(\ln x-2)\Big]_e^2+x(\ln x-2)\Big]_e^3=2(\ln 2-2)+3(\ln 3-2)+2e$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 approssimante la funzione $f(x)=\ln(2x+1)$ in un intorno di $x_0=1$. Stabilire una maggiorazione della distanza tra $f(x)$ e $P_2(x)$ in $x=\frac{3}{2}$.

Si ha $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$, $f''(x)=\frac{-4}{(2x+1)^2}$ e $f'''(x)=\frac{16}{(2x+1)^3}$; da cui $f(1)=\ln(3)$, $f'(1)=\frac{2}{3}$, $f''(1)=-\frac{4}{9}$ e $f'''(c)=\frac{16}{(2c+1)^3}$; quindi $P_2(x)=\ln(3)+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2$. Dalla formula di Taylor si ottiene $\left|f\left(\frac{3}{2}\right)-P_2\left(\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{|f'''(c)|}{3!}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3=\frac{1}{3(2c+1)^3}$ dove $c\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Quindi $\frac{1}{192}<\left|f\left(\frac{3}{2}\right)-P_2\left(\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{1}{3(2c+1)^3}<\frac{1}{81}$

4. Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)k^{\alpha-\frac{1}{3}}$ converge.

Si applica il criterio del confronto asintotico; allora, per $\beta>0$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)k^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sin\left(h^{2\alpha}\right)}{h^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^{2\alpha}+o\left[h^{2\alpha}\right]}{h^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{1+o[1]}{h^{-\alpha-\frac{1}{3}+\beta}}=1 \quad \text{se} \quad -\alpha-\frac{1}{3}+\beta=0,$$

cioè se $\beta=\alpha+\frac{1}{3}$. Quindi la serie converge per $\beta>1$ ovvero per $\alpha+\frac{1}{3}>1\Rightarrow\alpha>\frac{2}{3}$.

PROVA D'ESAME DI CALCOLO 1 (A)

1. Determinare i valori da assegnare ai parametri reali α e β affinché la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\alpha x)}{8x} & se\ x<0\\ (\beta-1)\sqrt{x}+\cos x & se\ x\geq 0\end{cases}$ risulti continua e derivabile in $x=0$.

La funzione è continua a dx di 0 e si ha $f(0)=1$. Per $\alpha=0$ f non risulta continua a sx di 0. Per $\alpha\neq 0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(\alpha x)}{8x}=\dfrac{\alpha}{8}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\dfrac{\alpha}{8}$, quindi f risulta continua in 0 solo se $\dfrac{\alpha}{8}=1$, cioè $\alpha=8$. Per ogni $x\neq 0$ si ha $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{8x\cos(8x)-\sin(8x)}{8x^2} & \text{se } x<0\\ \dfrac{(\beta-1)}{2\sqrt{x}}-\sin x & \text{se } x>0\end{cases}$. Si ha, applicando la regola di De L'Hospital, $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-4\lim_{x\to 0^-}\sin(8x)=0$, mentre $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\begin{cases}0 & se\ \beta=1\\ \infty & se\ \beta\neq 1\end{cases}$. Quindi f risulta derivabile in 0 solo se $\beta=1$.

2. Determinare il dominio e il segno della funzione $f(x)=\dfrac{\arcsin\left(2-\sqrt{x+7}\right)}{2^{x+8}-1}$.

Le condizioni da imporre sono $x+7\geq 0$, $2^{x+8}-1\neq 0$ e $-1\leq 2-\sqrt{x+7}\leq 1$. Le prime due disequazioni sono soddisfatte per $x\geq -7$ e $x\neq -8$. L'ultima equivale al sistema $\begin{cases}\sqrt{x+7}\geq 1\\ \sqrt{x+7}\leq 3\end{cases}$ soddisfatto per $-6\leq x\leq 2$. Il dominio di f è allora $D_f=[-6,2]$. Per il segno si ha $2^{x+8}-1>0\ \forall x\in D_f$, mentre $\arcsin\left(2-\sqrt{x+7}\right)\geq 0$ se $2-\sqrt{x+7}\geq 0$, cioè per $x\leq -3$. Quindi $f(x)>0$ in $[-6,-3)$, $f(x)<0$ in $(-3,2]$ e $f(-3)=0$.

3. Stabilire, giustificando le risposte, il comportamento per $n\to\infty$ delle seguenti successioni $\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$, $\left\{1-(-1)^n\right\}$ e $\left\{1-(-2)^n\right\}$.

$\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ converge a 1; infatti $1-\dfrac{1}{2^n}\leq 1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\leq 1+\dfrac{1}{2^n}$ e le funzioni maggiorante e minorante convergono entrambe a 1. Allora il risultato segue per il teorema del confronto.

$\left\{1-(-1)^n\right\}$ e $\left\{1-(-2)^n\right\}$ sono irregolari perché si comportano diversamente per n pari e per n dispari.

4. Determinare l'espressione e il dominio della funzione inversa di $f(x)=\arctan x+\pi$.

$f^{-1}(y)=\tan y$ con $y\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

PROVA D'ESAME DI CALCOLO 1 (B)

1. Determinare i valori da assegnare ai parametri reali α e β affinché la funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha x)}{4x} & se\ x>0 \\ (\beta+1)\sqrt{-x}+\cos x & se\ x\le 0 \end{cases}$ risulti continua e derivabile in $x=0$.

La funzione è continua a sx di 0 e si ha $f(0)=1$. Per $\alpha=0$ f non risulta continua a dx di 0. Per $\alpha\neq 0$ si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\alpha x)}{4x}=\dfrac{\alpha}{4}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=\dfrac{\alpha}{4}$, quindi f risulta continua in 0 solo se $\dfrac{\alpha}{4}=1$, cioè $\alpha=4$. Per ogni $x\neq 0$ si ha $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{4x\cos(4x)-\sin(4x)}{4x^2} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{(-\beta-1)}{2\sqrt{-x}}-\sin x & \text{se } x<0 \end{cases}$.

Si ha, applicando la regola di De L'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-2\lim\limits_{x\to 0^-}\sin(4x)=0$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\begin{cases} 0 & se\ \beta=-1 \\ \infty & se\ \beta\neq -1 \end{cases}$. Quindi f risulta derivabile in 0 solo se $\beta=-1$.

2. Determinare il dominio e il segno della funzione $f(x)=\dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x+2}-3\right)}{2^{-x-8}-1}$.

Le condizioni da imporre sono $x+2\ge 0$, $2^{-x-8}-1\neq 0$ e $-1\le\sqrt{x+2}-3\le 1$. Le prime due disequazioni sono soddisfatte per $x\ge -2$ e $x\neq -8$. L'ultima equivale al sistema $\begin{cases} \sqrt{x+2}\ge 2 \\ \sqrt{x+2}\le 4 \end{cases}$ soddisfatto per $2\le x\le 14$. Il dominio di f è allora $D_f=[2,14]$. Per il segno si ha $2^{-x-8}-1<0\ \forall x\in D_f$, mentre $\arcsin\left(\sqrt{x+2}-3\right)\ge 0$ se $\sqrt{x+2}-3\ge 0$, cioè per $x\ge 7$. Quindi $f(x)>0$ in $[2,7)$, $f(x)<0$ in $(7,14]$ e $f(7)=0$.

3. Stabilire, giustificando le risposte, il comportamento per $n\to\infty$ delle seguenti successioni $\left\{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$, $\left\{1+(-1)^n\right\}$ e $\left\{1+(-2)^n\right\}$.

$\left\{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ converge a 1; infatti $1-\dfrac{1}{2^n}\le 1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\le 1+\dfrac{1}{2^n}$ e le funzioni maggiorante e minorante convergono entrambe a 1. Allora il risultato segue per il teorema del confronto.

$\left\{1+(-1)^n\right\}$ e $\left\{1+(-2)^n\right\}$ sono irregolari perché si comportano diversamente per n pari e per n dispari.

4. Determinare l'espressione e il dominio della funzione inversa di $f(x)=\arctan x-\pi$.

$f^{-1}(y)=\tan y$ con $y\in\left[-\dfrac{3}{2}\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

PROVA D'ESAME DI CALCOLO 2 (A)

1. Calcolare il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 approssimante la funzione $f(x)=\ln(3x+1)$ in un intorno di $x_0=1$. Stabilire una maggiorazione della distanza tra $f(x)$ e $P_2(x)$ in $x=\frac{4}{3}$.

Si ha $f'(x)=\frac{3}{3x+1}$, $f''(x)=\frac{-9}{(3x+1)^2}$ e $f'''(x)=\frac{54}{(3x+1)^3}$; da cui $f(1)=\ln(4)$, $f'(1)=\frac{3}{4}$, $f''(1)=-\frac{9}{16}$ e $f'''(c)=\frac{54}{(3c+1)^3}$; quindi $P_2(x)=\ln(4)+\frac{3}{4}(x-1)-\frac{9}{32}(x-1)^2$. Dalla formula di Taylor si ottiene $\left|f\left(\frac{4}{3}\right)-P_2\left(\frac{4}{3}\right)\right|=\frac{|f'''(c)|}{3!}\left(\frac{4}{3}-1\right)^3=\frac{1}{3(3c+1)^3}$ dove $c\in\left(1,\frac{4}{3}\right)$. Quindi $\frac{1}{375}<\left|f\left(\frac{4}{3}\right)-P_2\left(\frac{4}{3}\right)\right|=\frac{1}{3(3c+1)^3}<\frac{1}{192}$

2. Determinare la parte reale ed immaginaria del numero complesso $z=\left(\frac{16}{\sqrt{3}-i}+\frac{4}{i}\right)(i-1)^{16}$.

Si ha $|i-1|=\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(i-1)=\frac{3}{4}\pi$; allora per la formula di De Moivre $(i-1)^{16}=|i-1|^{16}\left\{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right\}^{16}=2^8\{\cos(12\pi)+i\sin(12\pi)\}=256$. Quindi $z=256\left(\frac{16}{\sqrt{3}-i}\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}-4i\right)=256\left(\frac{16\sqrt{3}+16i}{4}-4i\right)=256\left(4\sqrt{3}\right)=1024\sqrt{3}$ da cui si ricava $\operatorname{Re} z=1024\sqrt{3}$ e $\operatorname{Im} z=0$.

3. Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right)k^{\frac{3}{2}-2\alpha}$ converge.

Si applica il criterio del confronto asintotico; allora, per $\beta>0$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{3\alpha}}\right)k^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sin\left(h^{3\alpha}\right)}{h^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^{3\alpha}+o\left[h^{3\alpha}\right]}{h^{\frac{3}{2}-2\alpha+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{1+o[1]}{h^{\frac{3}{2}-5\alpha+\beta}}=1 \text{ **se** } \frac{3}{2}-5\alpha+\beta=0,$$

cioè se $\beta=5\alpha-\frac{3}{2}$. Quindi la serie converge per $\beta>1$ ovvero per $5\alpha-\frac{3}{2}>1\Rightarrow\alpha>\frac{1}{2}$.

4. Calcolare l'area della regione sottesa dal grafico di $f(x)=\ln x+1$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

Si ha $A=\int_{1/3}^{2/3}|\ln x+1|dx$. Poiché $\ln x+1\geq0$ se $x\geq1/e$, si ottiene

$$A=-\int_{1/3}^{1/e}(\ln x+1)\,dx+\int_{1/e}^{2/3}(\ln x+1)\,dx=x\ln x\Big]_{1/e}^{1/3}+x\ln x\Big]_{1/e}^{2/3}=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{2}{e}.$$

PROVA D'ESAME DI CALCOLO 2 (B)

1. Calcolare il polinomio di Taylor $P_2(x)$ di grado 2 approssimante la funzione $f(x)=\ln(2x+1)$ in un intorno di $x_0=1$. Stabilire una maggiorazione della distanza tra $f(x)$ e $P_2(x)$ in $x=\frac{3}{2}$.

Si ha $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$, $f''(x)=\frac{-4}{(2x+1)^2}$ e $f'''(x)=\frac{16}{(2x+1)^3}$; da cui $f(1)=\ln(3)$, $f'(1)=\frac{2}{3}$, $f''(1)=-\frac{4}{9}$ e $f'''(c)=\frac{16}{(2c+1)^3}$; quindi $P_2(x)=\ln(3)+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2$. Dalla formula di Taylor si ottiene $\left|f\left(\frac{3}{2}\right)-P_2\left(\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{|f'''(c)|}{3!}\left(\frac{3}{2}-1\right)^3=\frac{1}{3(2c+1)^3}$ dove $c\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$. Quindi

$$\frac{1}{192}<\left|f\left(\frac{3}{2}\right)-P_2\left(\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{1}{3(2c+1)^3}<\frac{1}{81}$$

2. Determinare la parte reale ed immaginaria del numero complesso $z=\left(\frac{36}{\sqrt{5}-i}+\frac{6}{i}\right)(1-i)^{12}$.

Si ha $|1-i|=\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(1-i)=-\frac{\pi}{4}$; allora per la formula di De Moivre

$$(1-i)^{12}=|1-i|^{12}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{12}=2^6\left\{\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)\right\}=-64.$$ Quindi

$$z=-64\left(\frac{36}{\sqrt{5}-i}\,\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}+i}-6i\right)=-64\left(\frac{36\sqrt{5}+36i}{6}-6i\right)=-64\left(6\sqrt{5}\right)=-384\sqrt{5}$$ da cui si ricava $\operatorname{Re}z=-384\sqrt{5}$ e $\operatorname{Im}z=0$.

3. Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)k^{\alpha-\frac{1}{3}}$ converge.

Si applica il criterio del confronto asintotico; allora, per $\beta>0$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{k^{2\alpha}}\right)k^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sin\left(h^{2\alpha}\right)}{h^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{h^{2\alpha}+o\left[h^{2\alpha}\right]}{h^{\alpha-\frac{1}{3}+\beta}}=\lim_{h\to0^+}\frac{1+o[1]}{h^{-\alpha-\frac{1}{3}+\beta}}=1 \quad \text{se} \quad -\alpha-\frac{1}{3}+\beta=0,$$

cioè se $\beta=\alpha+\frac{1}{3}$. Quindi la serie converge per $\beta>1$ ovvero per $\alpha+\frac{1}{3}>1\Rightarrow\alpha>\frac{2}{3}$.

4. Calcolare l'area della regione sottesa dal grafico di $f(x)=\ln x-1$ nell'intervallo $[2,3]$.

Si ha $A=\int_2^3|\ln x-1|dx$. Poiché $\ln x-1\geq0$ se $x\geq e$, si ottiene

$$A=-\int_2^e(\ln x-1)\,dx+\int_e^3(\ln x-1)\,dx=x(\ln x-2)\Big]_e^2+x(\ln x-2)\Big]_e^3=2(\ln2-2)+3(\ln3-2)+2e.$$