1° PROVA D'ESAME DI CALCOLO 1 (A)

1. Studiare il segno, il comportamento agli estremi del dominio ed eventuali punti di estremo relativi della funzione $f(x)=3^x-4^x$.

$D_f=\mathbb{R}$. $f(x)=3^x\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]>0$ se $1-\left(\frac{4}{3}\right)^x>0\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^x<1\Rightarrow x<0$. Quindi $f(x)>0$ se $x<0$, $f(x)<0$ se $x>0$ e $f(0)=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}3^x\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}3^x\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^x\right]=-\infty$. Si ha $f'(x)=3^x\ln 3-4^x\ln 4=3^x\ln 3\left[1-\left(\frac{4}{3}\right)^x\frac{\ln 4}{\ln 3}\right]$. Allora $f'(x)>0$ se $1-\left(\frac{4}{3}\right)^x\frac{\ln 4}{\ln 3}>0\Rightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^x<\frac{\ln 3}{\ln 4}\Rightarrow x<\log_{4/3}\left(\frac{\ln 3}{\ln 4}\right)$, $f'(x)<0$ se $x>\log_{4/3}\left(\frac{\ln 3}{\ln 4}\right)$.

Quindi il punto $x_M=\log_{4/3}\left(\frac{\ln 3}{\ln 4}\right)$ è un punto di massimo assoluto.

2. Stabilire l'invertibilità della funzione $f(x)=\cos 3x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ e nel caso affermativo determinare l'espressione esplicita della funzione inversa.

Poniamo $t=3x$. Per $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$ si ha $\pi\le t\le 2\pi$, quindi $y=f(t)=\cos t$ è invertibile in $[\pi,2\pi]$, ovvero $y=f(x)=\cos 3x$ è invertibile in $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$. Inoltre si ha $t=f^{-1}(y)=\arccos(-y)+\pi$ e quindi $x=f^{-1}(y)=\frac{\arccos(-y)+\pi}{3}$.

3. Sia, per $x\ge 0$, $f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ dove $g(x)=\begin{cases}3x & se\ 0\le x\le\frac{1}{3}\\ 1 & se\ \frac{1}{3}\le x\le\ln 3\\ 3e^{-x} & se\ x\ge\ln 3\end{cases}$. Stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=\frac{2}{3}+\ln 3$.

Sia $F(x)=f(x)-\left(\frac{2}{3}+\ln 3\right)$; occorre allora stabilire il numero degli zeri di F nell'intervallo $[0,+\infty]$. Poiché g è continua in $[0,+\infty]$ allora *f*, e quindi *F*, sono derivabili nello stesso intervallo. Si ha $F'(x)=g(x)>0$ in $[0,+\infty]$ da cui segue che F è ivi strettamente crescente e quindi ammette al più uno zero. Si ha $F(0)=-\left(\frac{2}{3}+\ln 3\right)<0$; per studiare il comportamento di F per $x\to+\infty$ occorre determinare l'espressione di *f* per *x* abbastanza grande. Per $x>\ln 3$ si ha

$$f(x)=\int_0^{1/3}3t\,dt+\int_{1/3}^{\ln 3}dt+\int_{\ln 3}^{x}3e^{-t}\,dt=\frac{3}{2}t^2\Big]_0^{1/3}+t\Big]_{1/3}^{\ln 3}-3e^{-t}\Big]_{\ln 3}^{x}=\frac{5}{6}+\ln 3-3e^{-x}.$$

Allora, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(\frac{2}{3}+\ln 3\right) = \left(\frac{5}{6}+\ln 3\right) - \left(\frac{2}{3}+\ln 3\right) = \frac{1}{6} > 0$ da cui segue che F ammette un unico zero in $\left[0,+\infty\right]$.

4. Stabilire il carattere della serie numerica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{settsinh}(k)}{\sqrt{1+k^2}}$.

Sia $t_k = \int_1^k \frac{\operatorname{settsinh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\operatorname{settsinh}^2(k)}{2} - \frac{\operatorname{settsinh}(1)}{2}$. Poiché $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, dal criterio dell'integrale segue la divergenza della serie.

1° PROVA D'ESAME DI CALCOLO 1 (B)

1. Studiare il segno, il comportamento agli estremi del dominio ed eventuali punti di estremo relativi della funzione $f(x)=5^x-2^x$.

$D_f=\mathbb{R}$. $f(x)=2^x\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right]>0$ se $\left(\frac{5}{2}\right)^x-1>0\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x>1\Rightarrow x>0$. Quindi $f(x)>0$ se $x>0$, $f(x)<0$ se $x<0$ e $f(0)=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2^x\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2^x\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right]=+\infty$. Si ha $f'(x)=5^x\ln 5-2^x\ln 2=2^x\ln 2\left[\left(\frac{5}{2}\right)^x\frac{\ln 5}{\ln 2}-1\right]$.

Allora $f'(x)>0$ se $\left(\frac{5}{2}\right)^x\frac{\ln 5}{\ln 2}-1>0\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x>\frac{\ln 2}{\ln 5}\Rightarrow x>\log_{5/2}\left(\frac{\ln 2}{\ln 5}\right)$, $f'(x)<0$ se $x<\log_{5/2}\left(\frac{\ln 2}{\ln 5}\right)$. Quindi il punto $x_m=\log_{5/2}\left(\frac{\ln 2}{\ln 5}\right)$ è un punto di minimo assoluto.

2. Stabilire l'invertibilità della funzione $f(x)=\sin 3x$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ e nel caso affermativo determinare l'espressione esplicita della funzione inversa.

Poniamo $t=3x$. Per $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$ si ha $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}$, quindi $y=f(t)=\sin t$ è invertibile in $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, ovvero $y=f(x)=\sin 3x$ è invertibile in $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. Inoltre si ha $t=f^{-1}(y)=\arcsin(-y)+\pi$ e quindi $x=f^{-1}(y)=\frac{\arcsin(-y)+\pi}{3}$.

3. Sia, per $x\ge 0$, $f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ dove $g(x)=\begin{cases}2x & se\ 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1 & se\ \frac{1}{2}\le x\le 1\\ \frac{2}{1+x^2} & se\ x\ge 1\end{cases}$. Stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=\frac{\pi+1}{2}$.

Sia $F(x)=f(x)-\left(\frac{\pi+1}{2}\right)$; occorre allora stabilire il numero degli zeri di F nell'intervallo $[0,+\infty]$. Poiché g è continua in $[0,+\infty]$ allora *f*, e quindi *F*, sono derivabili nello stesso intervallo. Si ha $F'(x)=g(x)>0$ in $[0,+\infty]$ da cui segue che F è ivi strettamente crescente e quindi ammette al più uno zero. Si ha $F(0)=-\left(\frac{\pi+1}{2}\right)<0$; per studiare il comportamento di F per $x\to+\infty$ occorre determinare l'espressione di *f* per *x* abbastanza grande. Per $x>1$ si ha $f(x)=\int_0^{1/2}2t\,dt+\int_{1/2}^{1}dt+\int_1^x\frac{2}{1+t^2}dt=t^2\Big]_0^{1/2}+t\Big]_{1/2}^{1}+2\arctan t\Big]_1^x=\frac{3}{4}-\frac{\pi}{2}+2\arctan x$.

Allora, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(\frac{\pi+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi+1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$ da cui segue che F ammette un unico zero in $[0,+\infty]$.

4. Stabilire il carattere della serie numerica $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\operatorname{settcosh}(k)}{\sqrt{k^2-1}}$.

Sia $t_k = \int_2^k \frac{\operatorname{settcosh}(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\operatorname{settcosh}^2(k)}{2} - \frac{\operatorname{settcosh}(2)}{2}$. Poiché $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, dal criterio dell'integrale segue la divergenza della serie.

PROVA INTEGRATIVA DI CALCOLO 1 (A)

1. Determinare le due radici complesse e coniugate w e $\bar{w}$ dell'equazione $z^4+1=0$ tali che $(z-w)(z-\bar{w})=z^2+\sqrt{2}z+1$.

$z^4+1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1} \Rightarrow z_k=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0,1,2,3$. Allora si ha $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Quindi $w=z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ e $\bar{w}=z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

2. Sia, per $x\geq 0$, $f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ dove $g(x)=\begin{cases} 3x & se\ 0\leq x\leq \frac{1}{3} \\ 1 & se\ \frac{1}{3}\leq x\leq \ln 3 \\ 3e^{-x} & se\ x\geq \ln 3 \end{cases}$. Stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=\frac{2}{3}+\ln 3$.

Sia $F(x)=f(x)-\left(\frac{2}{3}+\ln 3\right)$; occorre allora stabilire il numero degli zeri di F nell'intervallo $[0,+\infty]$. Poiché g è continua in $[0,+\infty]$ allora *f*, e quindi *F*, sono derivabili nello stesso intervallo. Si ha $F'(x)=g(x)>0$ in $[0,+\infty]$ da cui segue che *F* è ivi strettamente crescente e quindi ammette al più uno zero. Si ha $F(0)=-\left(\frac{2}{3}+\ln 3\right)<0$; per studiare il comportamento di *F* per $x\to+\infty$ occorre determinare l'espressione di *f* per *x* abbastanza grande. Per $x>\ln 3$ si ha

$$f(x)=\int_0^{1/3}3t\,dt+\int_{1/3}^{\ln 3}dt+\int_{\ln 3}^{x}3e^{-t}\,dt=\frac{3}{2}t^2\Big]_0^{1/3}+t\Big]_{1/3}^{\ln 3}-3e^{-t}\Big]_{\ln 3}^{x}=\frac{5}{6}+\ln 3-3e^{-x}.$$

Allora, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{2}{3}+\ln 3\right)=\left(\frac{5}{6}+\ln 3\right)-\left(\frac{2}{3}+\ln 3\right)=\frac{1}{6}>0$ da cui segue che *F* ammette un unico zero in $[0,+\infty]$.

3. Dimostrare o confutare le seguenti relazioni: per $x\to 0$, $x^3+o[x^2]=o[x^2]$ e $x^2+o[x^2]=o[x^2]$.

La prima relazione è vera, infatti si ha $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o\left[x^2\right]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(x+o[1]\right)=0$. La seconda relazione è falsa, infatti $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o\left[x^2\right]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(1+o[1]\right)=1$.

4. Stabilire il carattere della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{settsinh}(k)}{\sqrt{1+k^2}}$.

Sia $t_k=\int_1^k\frac{\operatorname{settsinh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{\operatorname{settsinh}^2(k)}{2}-\frac{\operatorname{settsinh}(1)}{2}$. Poiché $\lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty$, dal criterio dell'integrale segue la divergenza della serie.

PROVA INTEGRATIVA DI CALCOLO 1 (B)

1. Determinare le due radici complesse e coniugate w e $\bar{w}$ dell'equazione $z^4+1=0$ tali che $(z-w)(z-\bar{w})=z^2-\sqrt{2}z+1$.

$z^4+1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1} \Rightarrow z_k=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0,1,2,3$. Allora si ha $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Quindi $w=z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $\bar{w}=z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

2. Sia $f(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ dove $g(x)=\begin{cases} 2x & se\ 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1 & se\ \frac{1}{2}\le x\le 1 \\ \frac{2}{1+x^2} & se\ x\ge 1 \end{cases}$. Stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=\frac{\pi+1}{2}$.

Sia $F(x)=f(x)-\left(\frac{\pi+1}{2}\right)$; occorre allora stabilire il numero degli zeri di *F* nell'intervallo $[0,+\infty]$. Poiché g è continua in $[0,+\infty]$ allora *f*, e quindi *F*, sono derivabili nello stesso intervallo. Si ha $F'(x)=g(x)>0$ in $[0,+\infty]$ da cui segue che *F* è ivi strettamente crescente e quindi ammette al più uno zero. Si ha $F(0)=-\left(\frac{\pi+1}{2}\right)<0$; per studiare il comportamento di *F* per $x\to+\infty$ occorre determinare l'espressione di *f* per *x* abbastanza grande. Per $x>1$ si ha

$$f(x)=\int_0^{1/2}2t\,dt+\int_{1/2}^1 dt+\int_1^x\frac{2}{1+t^2}\,dt=t^2\Big]_0^{1/2}+t\Big]_{1/2}^1+2\arctan t\Big]_1^x=\frac{3}{4}-\frac{\pi}{2}+2\arctan x.$$

Allora, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{\pi+1}{2}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi+1}{2}\right)=\frac{1}{4}>0$ da cui segue che *F* ammette un unico zero in $[0,+\infty]$.

3. Dimostrare o confutare le seguenti relazioni: per $x\to 0$, $x^4+o[x^4]=o[x^4]$ e $x^5+o[x^4]=o[x^4]$.

La prima relazione è falsa, infatti si ha $\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o\left[x^4\right]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(1+o[1]\right)=1$. La seconda relazione è vera, infatti $\lim_{x\to 0}\frac{x^5+o\left[x^4\right]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(x+o[1]\right)=0$.

4. Stabilire il carattere della serie numerica $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\operatorname{settcosh}(k)}{\sqrt{k^2-1}}$.

Sia $t_k=\int_2^k\frac{\operatorname{settcosh}(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{\operatorname{settcosh}^2(k)}{2}-\frac{\operatorname{settcosh}(2)}{2}$. Poiché $\lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty$, dal criterio dell'integrale segue la divergenza della serie.